



燕山大学
YANSHAN UNIVERSITY

博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION

论文题目 基于 LOI/LMI 的时滞系统时滞相关
稳定性研究

作者姓名 吴双双

学科专业 控制科学与工程

指导教师 华长春 教授

2019 年 12 月

中图分类号：TP13
UDC：007.5

学校代码：10216
密级：公开

工学博士学位论文

基于 LOI/LMI 的时滞系统时滞相关 稳定性研究

博士研究生：吴双双

导 师：华长春 教授

申 请 学 位：工学博士

学 科 专 业：控制科学与工程

所 属 学 院：电气工程学院

答 辩 日 期：2019 年 12 月

授予学位单位：燕山大学

A Dissertation for Doctoral Degree in Control Science and Engineering

**STABILITY RESEARCH FOR TIME-DELAY
SYSTEMS USING LOI / LMI METHOD**

by Wu Shuangshuang

Supervisor: Professor Hua Changchun

Yanshan University

December, 2019

燕山大学博士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的博士学位论文《基于 LOI/LMI 的时滞系统时滞相关稳定性研究》，是本人在导师指导下，在燕山大学攻读博士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签字： 日期： 年 月 日

燕山大学博士学位论文使用授权书

《基于 LOI/LMI 的时滞系统时滞相关稳定性研究》系本人在燕山大学攻读博士学位期间在导师指导下完成的博士学位论文。本论文的研究成果归燕山大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解燕山大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权燕山大学，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

保密 ，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘要

时滞现象普遍存在于能源、物质、信息的传输过程中，在自然和工程系统中均不可避免。时滞的存在通常会导致系统性能下降，甚至直接导致系统不稳定。因此对于时滞系统的稳定性研究引起了国内外很多学者的关注。在近二十年的时间里，Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函构造技术的改进和线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality, LMI)方法成为了时滞系统分析研究的主流方法。随着平方和方法的发展以及最近 MATLAB 的 PIE 工具箱的提出，基于线性算子不等式 (Linear Operator Inequality, LOI) 的分析方法为时滞系统稳定性研究提供了新的思路。本文将分别基于线性矩阵不等式和线性算子不等式技术，围绕线性、非线性时滞系统的稳定性问题展开研究。主要工作如下：

(1) 研究了连续线性多时滞系统的稳定性问题。考虑基础状态的概念，对连续线性多时滞系统常见的时滞常微分方程表达式进行了重构，得到了其基于基础状态的常微分-偏微分表达式，并将其写成相应的分布式参数系统，通过构建基于线性偏积分算子的完全型 L-K 泛函，得到了基于 LOI 的保守性较小的时滞相关稳定性判据。所得判据通过 MATLAB 的 PIE 工具箱求解。数值算例验证了所得的稳定性判据的正确性及有效性。

(2) 研究了考虑传感器噪声的连续线性多时滞系统的 H_∞ 观测器设计问题。所设计的偏微分方程形式的观测器可以同时修正对系统当前及历史状态的观测值。构建线性偏积分算子形式的完全型 L-K 泛函，提出了基于 LOI 的时滞相关观测器设计方法，给出了观测器输出误差对外部干扰的鲁棒 H_∞ 性能指标下的观测器增益矩阵的确定方法。所得判据通过 MATLAB 的 PIE 工具箱求解得到了观测器输出误差对外部干扰的鲁棒 H_∞ 增益。数值仿真显示，所得的结果十分接近于用 Padé 工具求得到的 H_∞ 范数界，最高可精确达到其小数点后四位。

(3) 研究了离散时滞系统的稳定性分析问题。提出了保守性较小的求和不等式放缩方法，放松了 Wirtinger 求和不等式放缩约束条件。基于直接构建型 L-K 泛函，结合新型求和不等式放缩方法，得到了基于 LMI 的离散线性时滞系统和离散递归神经网络时滞系统的时滞相关稳定性判据。所得判据通过 MATLAB 的 LMI 工具箱求解。数值算例说明了所得稳定性判据具有较小的保守性。

(4) 研究了基于模糊采样控制的 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析问题。构建基于系统当前及历史状态的反馈控制器。基于环函数的概念，构造双边环函数，通过分析该双边环函数与 L-K 泛函的导数的情况来判断系统的稳定性问题，放松了对 L-K 泛函在整个时间域上单调递减的限制条件，结合改进的积分不等式技术，得到了基于 LMI 的时滞相关控制策略及稳定性判据。所得判据通过 MATLAB 的 LMI 工具箱求解。数值算例说明了所得判据具有较小的保守性，验证了所设计控制器的有效性和优越性。

关键词：时滞系统；渐近稳定；线性算子不等式；Lyapunov-Krasovskii 泛函；观测器优化；神经网络系统；T-S 模糊系统

Abstract

Time delays arise in the transport of energy, mass, information and such, and are omnipresent in natural and engineered systems. The presence of time delay often leads to the performance degradation and even instability of the system. Therefore, the study of time delay systems has always been a hot topic in control theory and research. With the development of the construction method of Lyapunov Krasovskii functional and linear inequality technology, Lyapunov Krasovskii method and LMI technique have been the main tools to the study of time-delay systems in recent two decades. Recently, the development of Sum Of Square technology and the newly proposed PIETOOLS (Partial Integral Equation Tools) bring the new sight into the research of time-delay systems. Based on linear matrix inequality and linear operator inequality technique, this paper investigates the stability problems of linear and nonlinear time-delay systems. The main works are summarized as follows.

(1) The stability problem of continuous linear systems with multiple delays is studied. Considering the fundamental-state concept, we represent the linear multi-delay systems into a fundamental-state-space equation and propose the corresponding DPS formation. A complete quadratic Lyapunov-Krasovskii functional in the form of inner product of linear partial integral operator is constructed and a novel stability criterion in the forms of linear operator inequality is given, which is solved by MATLAB PIETOOLS. The numerical example shows the correctness and effectiveness of our method.

(2) The H_∞ optimal observer synthesis for linear multi-time-delay systems with sensor noise is studied. The designed PDE-form observer can correct both the current state and the history of state of the system. A complete quadratic Lyapunov-Krasovskii functional based on Partial Integral operator is constructed, and a delay-dependent optimal estimation condition is obtained in the form of linear operator inequality. The method to solve the observer gain operator which can satisfies the H_∞ robust performance is provided. Using the MATLAB PIETOOLS solves the optimal H_∞ norm bound. The numerical examples show that the bound value is very close to the theoretical analysis

bound value obtained by Padé tool, even upto the fourth decimal point.

(3) The stability analysis of discrete time-delay systems is studied. We propose a less conservative summation inequality, which relaxes the Wirtinger inequality. By means of a new summation inequality and the directly constructed Lyapunov-Krasovskii functional, new delay-dependent stability criteria in the form of linear matrix inequalities are obtained for discrete-time linear delay system and discrete-time recurrent neural network system respectively, which can be solved by MATLAB LMITOOLS. Less conservativeness of the criteria over some reported results is shown by numerical example.

(4) The stability analysis and sample-date-based control of T-S fuzzy time-delay system are studied. The state feedback controller is constructed containing the current and history of state of the system. Based on the concept of loop function, a new two-side loop function is constructed. The stability performance is derived from the derivative change condition of sum of this loop functional and Lyapunov-Krasovskii functional. Based on the improved integral inequality technique, new delay-dependent sampled-data control strategy and stability criterion are obtained in the form of linear matrix inequality, which can be solved by MATLAB LMITOOLS. The numerical example shows the correctiveness and advantage of our method.

Keywords: Time-delay system; Asymptotical stability; Linear operator inequality; Lyapunov-Krasovskii functional; Optimal estimator; Neural network system; T-S Fuzzy system

目 录

摘 要.....	I
Abstract	III
主要符号说明.....	VII
第 1 章 绪 论.....	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 时滞系统稳定性研究现状.....	3
1.2.1 L-K 泛函的构建研究现状.....	5
1.2.2 L-K 泛函导数的处理研究现状.....	5
1.3 基于 L-K 泛函的时滞系统稳定性研究存在的问题.....	12
1.4 本文的结构安排.....	13
第 2 章 LMI/LOI 方法.....	15
2.1 引言.....	15
2.2 LMI 方法.....	15
2.3 LOI 方法.....	16
2.4 PIE 工具箱.....	22
2.5 本章小结.....	24
第 3 章 连续线性多时滞系统的时滞相关稳定性分析.....	25
3.1 引言.....	25
3.2 连续线性多时滞系统模型.....	26
3.3 系统 DPS 化.....	27
3.4 主要结果.....	30
3.4.1 DPS 系统的稳定性分析.....	30
3.4.2 时滞相关稳定性判据.....	31
3.5 数值算例.....	31
3.6 本章小结.....	35
第 4 章 连续线性多时滞系统的时滞相关优化观测器设计.....	36
4.1 引言.....	36
4.2 连续线性多时滞系统模型.....	37
4.3 DPS 系统优化观测器设计.....	38

4.4 主要结果	39
4.4.1 观测器构建	40
4.4.2 系统 DPS 化	41
4.4.3 时滞相关观测器设计判据	43
4.5 数值仿真	45
4.6 本章小结	50
第 5 章 离散线性时滞系统的时滞相关稳定性分析	51
5.1 引言	51
5.2 离散线性时滞系统模型及相关引理	52
5.3 主要结果	53
5.3.1 新型求和不等式	53
5.3.2 时滞相关稳定性判据	57
5.4 数值算例	61
5.5 本章小结	62
第 6 章 离散递归神经网络时滞系统的时滞相关稳定性分析	63
6.1 引言	63
6.2 离散递归神经网络时滞系统模型及相关引理	64
6.3 时滞相关稳定性判据	65
6.4 数值仿真	71
6.5 本章小结	73
第 7 章 T-S 模糊时滞系统的时滞相关稳定性分析及控制	74
7.1 引言	74
7.2 T-S 模糊时滞系统模型及相关引理	75
7.3 主要结果	78
7.3.1 时滞相关稳定性判据	78
7.3.2 采样控制器设计	82
7.4 数值仿真	85
7.5 本章小结	90
结 论	91
参考文献	93
攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果	104
致 谢	106

主要符号说明

\mathbb{R}	实数集.
\mathbb{R}^n	n 维欧几里得空间.
\mathbb{R}^+	非负实数集.
$\mathbb{C}[X]$	X 上的连续函数.
$L_2^n[X]$	从 X 到 \mathbb{R}^n 的 Lesbesque 平方可积向量函数.
$Z_{n,m}$	内积空间 $\mathbb{R}^n \times L_2^m[X]$.
$\langle x, y \rangle_Z$	Z 空间上的内积. $\forall x \in Z, y \in Z$, 有 $\langle x, y \rangle_Z = \int_X x^T y ds$.
X^T	矩阵 X 或者向量 X 的转置.
X^*	算子 X 的共轭.
$W_2^n[X]$	$\{x: x \in L_2^n[X], \dot{x} \in L_2^n[X]\}$.
I	具有适当维数的单位矩阵.
$\begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix}$	若 B 为常数矩阵, 则表示 $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$; 若 B 为算子, 则为 $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$.
$A > 0$	若 $A: Z \rightarrow Z$, 则 $\forall x \in Z, \langle x, Ax \rangle_Z > 0$, 其中 A 为常数或算子.
$\mathcal{P}^1 \mathcal{P}^2$	若 $\mathcal{P}^1: Z \rightarrow Y, \mathcal{P}^2: X \rightarrow Z$, 则 $\forall x \in Z, (\mathcal{P}^1 \mathcal{P}^2)x = \mathcal{P}^1(\mathcal{P}^2 x)$.
$e_i (i=1, \dots, p)$	块元矩阵(Block entry matrices), 如 $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0_{n \times (p-2)n} \end{bmatrix}$.
$\text{sym}\{A\}$	$A + A^T$.
X^{-1}	矩阵 X 的逆矩阵或算子 X 的逆算子.
$x \in \text{Co}\{b_1, \dots, b_k\}$	存在 $\alpha_i \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, 使得 $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i b_i$.
$\text{deg}(Z(x))$	多项式函数 $Z(x)$ 关于 x 的最高阶数.

第1章 绪论

1.1 研究背景及意义

时滞，是指某一行为从开始时刻到产生结果时刻的时间段，可以解释为行为发生过程的“瞬间”或“时段”。在控制理论中，时滞通常指在系统运动中所发生的一种现象，即此刻的系统状态变化趋势既可能与系统当前的状态有关，同时又受到系统上一时刻状态的影响。在现实世界中，物质、能量、信息的传输都不可避免的存在滞后的现象，如生物系统的免疫应答时滞、人口模型的周期时滞及光学等自然领域，又如制造过程、过程控制系统、流体传输系统、网络化控制系统、太空探测系统等实际工程系统^[1,2]。客观地说，时滞特性广泛地存在我们的生活和生产中。我们把这类具有时滞特性的系统称为时滞系统^[3-5]。

时滞系统(Time Delay System)在有些文献中称为有后效的系统 (System with Aftereffect)、带死区的系统(Systems with Dead Time)、遗传系统 (Hereditary Systems), 或者微分-差分方程(Differential-difference Equation) 等等^[5]。按照时滞的出现原因来分，时滞可以分为物质传输时滞、通信时滞、测量时滞，或者是几种的混合时滞；按照时滞在系统中出现的位置来分，时滞可以分为系统状态时滞、输入时滞、输出时滞等^[4]。

时滞的存在降低了系统的响应速度，导致系统的某些关键状态信息不能及时有效地反馈系统运行状态。在某些系统中，时滞的存在可能会带来积极的影响，改善系统的性能及控制效果，例如在大棚恒温控制系统中的滞后使得恒温电器不会持续不间断的生热，达到调温的目的。但一般来说，时滞现象会给实际工程系统的分析与控制带来诸多不便和困难。与无时滞系统相比，时滞的存在常常会破坏系统的性能表现，使系统的鲁棒性能变差，甚至导致系统最基本的性能——稳定性不能得到保证，是引起系性能紊乱和震荡的一个重要因素^[6-8]。例如下面一个最简单的时滞系统，

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-h), & x(t) \in \mathbb{R} \\ x(s) = \phi(s), & s \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1-1)$$

其中， $h > 0$ 是时滞， $\phi(s)$ 是系统的初始状态函数。该系统在无时滞时($h \equiv 0$)，显然

是满足渐近稳定的；在有时滞的情况下则表现为：在 $h \in [0, \pi/2)$ 时是渐近稳定的，在 $h > \pi/2$ 时是发散的。时滞的存在影响到了系统的稳定性表现。另外，作为一类具有无限维的泛函微分方程系统，时滞系统的特征方程属于超越方程，系统方程的解与系统在时滞区间的状态相关，如式(1-1)中系统的状态值 $x(t)$ 是一个与 $t \in [t-h, t]$ 的状态值相关的函数，这使得对于时滞系统的分析及研究十分困难^[7,9-10]。因此，时滞系统的稳定性问题一直是时滞系统理论研究的热点问题。

另外，随着经济发展和人民日益增长的物质文化需求，人们对实际工程系统的性能要求越来越高，尤其是对时滞的存在非常敏感的系统，需要我们充分考虑时滞现象对实际工程系统带来的影响。如图 1-1 的医疗远程遥操作系统，即使是 0.1s 的时滞也会使得整个医疗过程失之毫厘，谬以千里。考虑了时滞现象而建立的数学模型更接近于实际工程系统模型，对于这类时滞系统的分析与研究结果更接近于工程系统的实际性能表现，对于指导实际工程系统的操作具有十分重要的现实价值和应用价值^[8,11-12]。

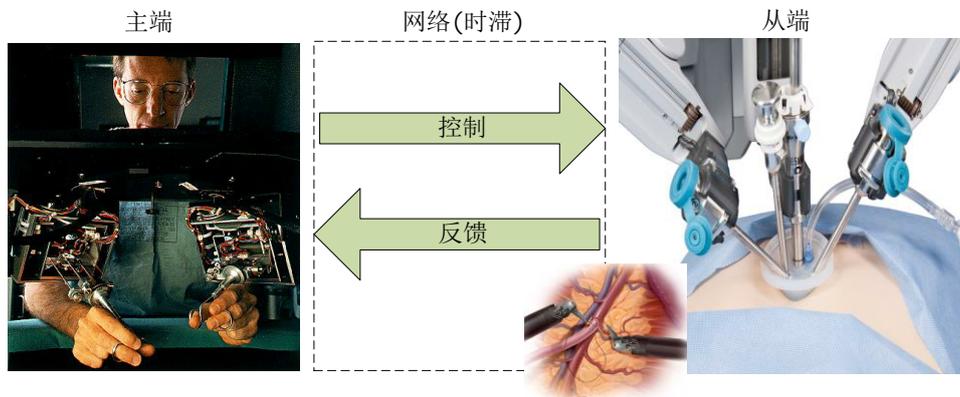


图 1-1 医疗远程控制系统示意图

Fig. 1-1 The diagram of remote medical control system

综上所述，对时滞系统的分析以及研究具有重要的理论意义和现实意义。对于时滞系统的理论研究，可以追溯到 18 世纪，Bernoulli 和 Leonard Euler 可以说是史上最早对时滞系统方程进行研究的学者^[4,9]。之后，A. Myshkis 和 R. Bellman 等人对时滞系统展开了系统性的研究工作，基于系统传递函数的频域分析方法得到了一定的发展，同时时域的分析方法也渐渐走入人们的视野^[13-16]。但直到最近二十年，时滞系统的研究才真正进入了自己的黄金时代，这主要得益于 Lyapunov-Krasovskii 泛函构造技术的不断改进、线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality, LMI)技术的提

出及发展^[17-22]。通过适当的处理,系统的分析与控制中的许多问题都可以转换成 LMI 的问题, LMI 求解算法应运而生。它将所有的 LMI 问题看作凸优化问题,可以有效、准确地分析和解决控制理论中的很多问题,成为了如今控制理论中常用的分析、求解工具。利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函理论以及 LMI 方法,人们对时滞系统的相关研究有了突出的进展,大量的研究成果涌现而出,并且在实际工程系统上得到了广泛的应用^[21-27]。另一方面,随着平方和 (Sum Of Square, SOS)方法的发展,以及最近的 MATLAB PIE 工具箱的提出^[23,28],使得人们可以利用 MATLAB 直接求解线性算子不等式。学者们开始将其应用于无限维系统的研究中,主要是偏微分方程系统(Partial differential Equation, PDE)和时滞系统的研究中^[29-32]。

在关于时滞系统的研究中,稳定性作为系统的最基本的性能指标,得到了中外学者的关注。如何获得保守性较小的时滞系统稳定性判据,如何放松确保时滞系统稳定的时滞界限,一直是时滞系统稳定性分析研究的热点问题。

1.2 时滞系统稳定性研究现状

毋庸置疑,时滞的存在会对系统的稳定性产生影响。在极少数情况下,时滞的存在是表现为积极作用的;通常情况下,时滞的存在对于系统是一个不稳定的因素。经过学者们的不懈努力,关于时滞系统稳定性分析的研究成果不断涌现^[33-36]。

从近几十年的研究成果来看,对于时滞系统的稳定性分析工作从研究方法上主要分为两类:特征根法和时域法。

特征根法最早是从频域的角度入手的,因此在很多文献中又被称为频域法,但实际上求取系统方程的特征根的方法不仅有频域法,还有代数方法,特征方程根聚类法等等,因此在本文将这些方法统称为特征根法。这类方法通过判断特征方程的根是否全部具有负实部来判断时滞系统的稳定性^[3]。优点是可以精确地获得时滞系统稳定性的充分必要条件(不含保守性),而且系统的特征方程可以反映系统的本质,使我们更加了解系统的性质和规律。缺点是只能应用于系统参数已知的线性定常时滞系统,对于时变时滞时滞系统,以及含有不确定性、外部干扰的时滞系统是无效的^[35-37]。因为当系统中存在可变参数后,求取特征方程及特征根实际上是很困难的,甚至是不可能的。

时域法是建立在 Lyapunov 函数上的方法,通过研究系统的状态方程来判断系统的稳定性,可以有效地分析、研究含有时变时滞、不确定性或者外部干扰的时滞

系统^[32-34]。同时，随着 LMI 技术的发展以及 MATLAB 的 LMI 工具箱的广泛应用，时域方法得到了更广泛的应用。利用时域法所得的稳定性判据根据一般可以分为时滞相关判据和时滞无关判据^[13,14]。一般来说，时滞无关的稳定性准则缺乏时滞信息，保守性较高，而且实际工程系统的时滞一般是有范围限制的，因此时滞相关稳定性研究获得了学者们的高度关注。时域法主要有 Lyapunov-Krasovskii (L-K) 泛函方法和 Lyapunov-Razumikhin(L-R) 函数^[38,39]两种方法。二者所得到的稳定性判据都是以 LMI 的形式来呈现。L-K 泛函方法的主要思路是基于 L-K 稳定性定理，通过构建 L-K 泛函得到时滞相关判据。通常来说，L-K 泛函方法较 L-R 函数方法更为灵活，保守性也会更低，因此 L-K 泛函方法是如今分析和研究时滞系统最常用的方法。有关 L-R 函数的介绍，本文不做讨论，感兴趣的读者可参考文献[38-40]。下面我们将重点介绍本文所使用的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法以及其研究现状。

1963 年，Krasovskii 提出了 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理，主要思想是构建 L-K 泛函，而不是使用传统的二次正定 Lyapunov 函数，通过分析泛函的性质来分析时滞系统的稳定性^[41]。

考虑时滞系统如下，

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, \phi_t), & t > 0, \\ \phi_t(s) = x(t+s), & s \in [-h, 0], \end{cases} \quad (1-2)$$

其中， $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C}[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是关于 t 连续的，关于 ϕ_t 是局部 Lipschitz 连续的。假设 $f(t, 0) = 0$ ，则可知系统(1-2)存在一个平凡解为 $x(t) \equiv 0$ 。下面给出 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理。

定理 1-1 (Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理^[3,38]) 设 $f: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ ，其中 $X \subseteq \mathbb{C}[-h, 0]$ ， $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 且 X, Y 有界，另外， $u, v, w: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是连续非减函数，满足 $u(0) = v(0) = 0$ ，且当 $\alpha > 0$ 时，有 $u(\alpha) > 0$ ， $v(\alpha) > 0$ 。若存在泛函 $V: \mathbb{R} \times \mathbb{C}[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得

$$\begin{aligned} u(|\phi(0)|) &\leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_{\mathbb{C}}), \\ \dot{V}(t, \phi) &\leq -w(|\phi(0)|), \end{aligned} \quad (1-3)$$

其中， $\dot{V}(t, \phi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} (V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, \phi)) - V(t, \phi))$ ，则系统(1-2)的平凡解是一致稳定的。此时若 $\alpha > 0$ ， $w(\alpha) > 0$ ，则系统(1-2)的平凡解是一致渐近稳定的，若同时

满足 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} u(\alpha) = \infty$ ，则系统(1-2)的平凡解是全局一致渐近稳定的。

在时滞系统的分析研究中，正常情况下构建的 L-K 泛函自然满足正定有界条件的，即 $u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c)$ 。因此在众多的研究成果中常常忽略不提泛函有界这一条件(实际上是自然满足了)，而大篇幅地叙述如何保证泛函导数的半负定性，即 $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|)$ 。

近十几年来，学者们基于 L-K 泛函理论对时滞系统展开了研究，通过构建 L-K 泛函，结合不等式技术和各种数学变换技巧，得到了 LMI 形式的时滞相关稳定性判据^[19-21,32]。然而相对于频域法，由于 L-K 泛函方法本身的限制，所得结果是时滞系统稳定的充分条件，总是存在一定的保守性。这类方法的保守性主要来自于两方面：L-K 泛函的构建和 L-K 泛函导数的处理。因此如何获得保守更小的时滞系统稳定性判据，放松确保系统稳定的时滞界限一直是学者们致力于解决的问题。

1.2.1 L-K 泛函的构建研究现状

L-K 泛函的选取是第一步，在很大程度上决定了结果的保守性程度的大小。目前在时滞系统的分析及研究中，Lyapunov-Krasovskii 泛函的构建形式有很多，在本文中，我们将其分为直接构建型 L-K 泛函和完全型 L-K 泛函两类：

直接构建型 L-K 泛函的构建基础是常数矩阵，具体可以细化为标准型，增广型，区间型，三重积分型，整体正定型等几种。因为这类 L-K 泛函的具体形式是由学者直接构建的，且一旦给出，由泛函形式带来的保守性是不可改变的，因此称其为直接构建型 L-K 泛函。直接构建型泛函计算、求解方便简单，结合 LMI 方法是目前时滞系统分析和研究的主流方法，但由于其构建方式本身的限制，所得结果必然具有一定的保守性；

完全型 L-K 泛函的构建基础是矩阵函数，矩阵函数的结构形式是可变的，极大地增加了泛函参数个数和求解的自由度。基于完全型 L-K 泛函的这一优点，有相应理论证明基于完全型泛函是有可能得到时滞系统的充分必要稳定性条件的^[42]。但矩阵函数的引入也带来了证明过程的困难，如何保证基于矩阵函数的 L-K 泛函的正定性，又如何证明泛函导数的半负定性，均有很大的难度。因此目前只有较少一部分学者在研究。

考虑如下时滞系统，

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1(t-h), \\ x(s) = \phi(s), \quad s \in [-h, 0], \end{cases} \quad (1-4)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, $A, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为系统矩阵, $\phi(s) \in \mathbb{C}[-h, 0]$ 是初始函数, h 为时滞, 满足 $0 \leq h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$ 。

以上述时滞系统为例, 我们将具体介绍两类 L-K 泛函的研究现状。

1.2.1.1 直接构建型 L-K 泛函

标准型 L-K 泛函结构最简单, 计算最方便, 且适用性强, 是早期几种构建方法中比较常用的一种。其典型的泛函形式如下:

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{t-h}^t \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)d\theta ds. \quad (1-5)$$

文献[43]中, Fridman 首次考虑了快时滞情况下(不对时滞导数作限制)的时滞系统的稳定性分析问题, 并给出了 H_∞ 控制器的设计方法。文献[44]中, Suplin 通过构建直接构建型 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 结合 Finsler 引理, 研究了线性时变时滞系统的 H_∞ 控制问题。采用标准型 L-K 泛函, 结合时滞分割技术, 文献[12]得到了保守性较小的时滞系统稳定性判据。文献[45]中, Kharitonov 等通过构建几种标准型泛函, 研究了定常时滞系统的稳定性分析问题。Shao 将标准型 L-K 泛函应用到了神经网络时滞系统中, 并得到了新的稳定性判据^[46]。文献[47]中, Fridman 研究了具有时变结构不确定性的离散时滞系统的稳定性分析和保成本控制问题。文献[48]结合标准型泛函和自由权矩阵, 研究了具有时变结构不确定性的时变时滞系统的鲁棒稳定性问题。

在标准型泛函的基础上, 对系统的状态向量进行了扩维, 增加了交叉项, 利用到更多关于时滞的信息, 以降低结果的保守性, 是目前时滞系统研究中最常用的一种泛函结构。其典型的泛函形式如下:

$$V(t) = v^T(t)Pv(t) + \int_{t-h}^t \eta^T(s)Q\eta(s)ds + \int_{t-h}^t \int_{t+\theta}^t \eta^T(s)Z\eta(s)d\theta ds, \quad (1-6)$$

其中, $v^T(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h) & \int_{t-h}^t x^T(s)ds \end{bmatrix}$, $\eta^T(s) = \begin{bmatrix} x^T(s) & \dot{x}^T(s) \end{bmatrix}$ 。

针对中立型时滞系统的稳定性问题, He 在文献[24]中构建增广型泛函, 引入自由权矩阵, 得到了保守性较小的稳定性判据, 文献[49]提出了广义的增广型 L-K 泛函, 在分析过程中避免使用了任何模型转换方法或交叉项的任何边界。基于克罗内

克积运算的新型增广矩阵，文献[50]构建了新的增广型 L-K 泛函，研究了具有混合耦合和区间时变时滞的神经网络系统的同步问题。基于增广型 L-K 泛函，Kwon 研究了含有区间时变时滞的线性系统的鲁棒性能及稳定性问题^[51]。

区间型主要是针对 $h_{\min} > 0$ (时滞下界大于 0) 的时滞区间系统提出的。在标准型泛函的基础上，考虑更多时滞本身的信息。 h_{\min} 是与时滞直接相关的信息，它的引入会降低研究结果的保守性。其典型的泛函形式如下：

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h_{\min}}^t x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-h}^{t-h_{\min}} x^T(s)Q_2x(s)ds + \int_{t-h_{\min}}^t \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z_1\dot{x}(s)d\theta ds + \int_{t-h}^{t-h_{\min}} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z_2\dot{x}(s)d\theta ds. \quad (1-7)$$

基于线性区间时滞系统的稳定性分析问题，Shao 在[52]文献中构造了考虑时滞下界信息的标准型泛函。文献[53]结合更多时滞下界的信息，构建了新的增广型 L-K 泛函，得到了保守性较小的稳定性判据。

与上述几种泛函形式相比，三重积分型引入了三重积分项。据作者所知，Sun 等首次提出了三重积分型泛函^[54,55]，通过引入更高的积分项，加入更多的待定项，通过增加结果的可解性而降低结果的保守性。其典型的泛函形式如下：

$$V(t) = v^T(t)Pv(t) + \int_{t-h}^t \eta^T(s)Q\eta(s)ds + \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t \eta^T(\theta)Z\eta(\theta)d\theta ds + \int_{-h}^0 \int_{-\lambda}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta d\lambda. \quad (1-8)$$

通过构造三重积分泛函形式，Sun 等分别研究了线性中立定常时滞系统以及时变时滞系统的稳定性问题，并针对每个系统给出了对应的稳定性判据^[54-56]。Chen 等借助三重泛函，讨论了神经网络时变区间时滞系统的稳定性问题^[57]。文献[58]结合三重积分型泛函和时滞分割方法，研究了中立型时滞神经网络的稳定性分析问题。除此之外，另有部分学者在三重积分泛函的基础上，提出了四重积分型泛函，相关文献如[59,60]。基于这类泛函所得的结果保守性会稍有降低，但随着积分项的增加，泛函形式越来越复杂，待定参数的增多使得计算复杂度也不断增大，与保守性降低的程度相比，结果并不理想，甚至可能会得不偿失，因此并没有得到广泛应用。

在上述的几种泛函构建方法中，为确保泛函的正定性，要求泛函的每一项都是正定的，即泛函中所有参数矩阵均正定，这就带来了一定的保守性。在整体正定型中，通过不等式技术和数学变换技巧，放松了这一限制条件，只要求泛函中积分项的参数矩阵正定。其典型的泛函形式如下：

$$V(t) = v^T(t)Pv(t) + \int_{t-h}^t \eta^T(s)Q\eta(s)ds + \int_{t-h}^t \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)d\theta ds, \quad (1-9)$$

其中, v, η 的定义如式(1-6)。令 $Q \geq 0, Z \geq 0$, 由 Jensen 不等式知,

$$\begin{aligned} \int_{t-h}^t \eta^T(s)Q\eta(s)ds &\geq \frac{1}{h} \left(\int_{t-h}^t \eta(s)ds \right)^T Q \left(\int_{t-h}^t \eta(s)ds \right) \\ \int_{t-h}^t \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)d\theta ds &\geq \frac{2}{h^2} \left(x(t) - \int_{t-h}^t x(s)ds \right)^T Z \left(x(t) - \int_{t-h}^t x(s)ds \right). \end{aligned} \quad (1-10)$$

由此可得,

$$\begin{aligned} V(t) &\geq v^T(t)Pv(t) + \frac{1}{h} \left(\int_{t-h}^t \eta(s)ds \right)^T Q \left(\int_{t-h}^t \eta(s)ds \right) \\ &\quad + \frac{2}{h^2} \left(x(t) - \int_{t-h}^t x(s)ds \right)^T Z \left(x(t) - \int_{t-h}^t x(s)ds \right) \\ &= v^T(t)\hat{P}v(t), \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \hat{P} = P + \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & -I & 0 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & -I & 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{h^2} [hI \ 0 \ -I]^T Z [hI \ 0 \ -I].$$

因此, 若 $Q \geq 0, Z \geq 0$, 以及 $\hat{P} \geq 0$ 成立, 则有 $V(t) \geq 0$ 。矩阵 P 既可能是半正定的, 也有可能是负定的。因此放松了对矩阵 P 的限定条件, 在一定程度上降低了结果的保守性。据作者所知, 整体正定型 L-K 泛函的思想最早是由 Xu 在 2015 年提出的, 借助 Jensen 不等式, 构造了整体正定泛函, 研究了线性定常时滞系统的稳定性分析问题, 得到了改进的稳定性分析判据^[61]。Lee 将这种思想拓展到线性时变时滞系统的稳定性分析中, 采用保守性更小的自由矩阵不等式技术构造新的整体正定型泛函^[62,63]。文献[64]利用整体正定型泛函, 研究了具有分布式时滞的神经网络系统的稳定性问题。

与多重积分型类似, 时滞分割型通过增加泛函中的待定矩阵的方法来放松分析结果。主要的思想是将单一的时滞区间分解成多个小区间, 使得泛函具有更大的调整空间, 减小结果的保守性。其典型的泛函形式如下:

$$V(x) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h/r}^t v^T(s)Qv(s)ds + \int_{-h/r}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)d\theta ds, \quad (1-11)$$

其中, r 为正常数, $v(s) = [x(s)^T, x^T(t-h/r), \dots, x^T(t-(r-1)h/r), x^T(t-h)]^T$ 。

文献[12]证明, 选取的 r 越大, 所得的稳定性判据保守性越小。在文献[65]中,

黄提出了一种新的时滞分解法，研究了递归神经网络时变时滞的状态估计问题。基于时滞分解的方法，文献[66]得到了一种 LMI 形式的改进的时滞相关稳定性判据，不需要使用模型变换，避免了模型变换引入新的保守性。文献[67]研究了具有时变时滞的不确定系统的鲁棒稳定性问题，得到了改进的稳定性结果。

1.2.1.2 完全型 L-K 泛函

直接构建型 L-K 泛函中，所有的待定参数矩阵，如 P, Q, Z 等，均为实数矩阵，限制了泛函求解域的大小。1965 年，Repin 提出了完全平方函数(Complete Quadratic Lyapunov Functionals)的概念，并构造了完全平方函数形式的 L-K 泛函，研究时滞系统的稳定性^[68]。本文中，我们将这类完全平方函数形式的 L-K 泛函称为完全型 L-K 泛函，其具体形式如下，

$$V(t) = \int_{-h}^0 \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & Q(s) \\ Q^T(s) & S(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+s) \end{bmatrix} ds + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+s) R(s, \theta) x(t+\theta) d\theta ds, \quad (1-12)$$

其待定参数中 P 为实数矩阵，而其它参数矩阵均为实函数矩阵，可以较大程度上放松待定参数的求解域。文献[42]指出基于完全型 L-K 泛函是可能得到线性时滞系统的充分必要的稳定性判据的，其定理如下：

定理 1-2^[42] 若一个线性时滞系统是渐近稳定的，那么必然存在一个完全平方函数 $V(t)$ ，使得对任意 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 和 $x \in C[-h, 0]$ ，有下式成立

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \varepsilon_1 \|x\|^2, \\ \dot{V}(x) &\leq -\varepsilon_2 \|x\|^2. \end{aligned} \quad (1-13)$$

与传统 Lyapunov 理论不同，定理 1-2 给出了线性时滞系统渐近稳定的充分必要条件。从理论上来说，如果可以保证在构造完全型泛函时的保守性足够小，那么我们就可以得到十分精确的线性时滞系统稳定性条件，甚至是充分必要的稳定性条件。

然而，完全型 L-K 泛函在引入矩阵函数增大泛函的求解域的同时，也带来了巨大的挑战——如何在引入尽可能小的保守性的情况下，构造合适的矩阵函数使得式(1-13)成立。这也解释了虽然完全型 L-K 泛函的形式及相关理论很早就已经给出了，但在这之后的三十年，很少有学者延续这一研究。直到 1997 年，Gu 提出了离散化 Lyapunov 函数的思想，利用分段线性矩阵函数构造了一类完全型 L-K 泛函，得到了

时滞系统的稳定性判据^[69]。但这种离散化的方法仅仅适用于线性定常时滞系统的稳定性分析中且计算复杂，因此没有得到广泛应用。随着 SOS 技术的发展和广泛应用，使得构造连续(这里指的是矩阵函数在除了 $s=0$ ， $s=-h$ 处以外关于 s 连续)的完全型泛函成为可能。Peet 在文献[70]中提供了一种构造完全型泛函的方法，并利用这类完全型泛函研究了线性多离散时滞系统的稳定性问题，所得的结果以 LMI 的形式给出。这种构造方法的主要思想是将完全型泛函进行 LMI 参数化，利用平方根的方法将完全型泛函写成 $\int_{-h}^0 f^T(x,s)Tf(x,s)ds$ 的形式，其中 T 为常数矩阵， $f(x,s)$ 是关于状态变量 x 和 s 的阶数可调的多项式函数向量。 $T > 0$ 可以确保完全型泛函的正定性，阶数越大，构造的完全型泛函的待定参数矩阵越多，基于此得到的稳定性判据保守性越小。

基于半群理论和线性算子理论，Peet 将时滞系统写成分布式参数系统 (Disturbuted parameter system, DPS)，并将这类完全型泛函写成了线性算子内积 $V(t) = \langle \chi, \mathcal{P}\chi \rangle$ (其中 \mathcal{P} 为线性算子) 的形式。文献[71]给出了线性算子 \mathcal{P} 的逆线性算子 \mathcal{P}^{-1} 的形式，使得这类完全型泛函的方法可以应用到控制问题的研究中，并基于此，研究了耦合微分方程的控制问题。文献[30]研究了线性多时滞系统的 H_∞ 观测器设计问题，所设计的观测器不仅可以修正对系统当前状态的观测值，还可以修正对系统过去状态的观测值。文献[29]研究了线性多时滞系统的 H_∞ 控制问题，所设计的控制器充分利用了系统当前的状态、过去的状态值，得到了保守性较小的 H_∞ 控制器设计方法。

1.2.2 L-K 泛函导数的处理研究现状

构建了 Lyapunov- Krasovskii 泛函之后，下一步便是求取泛函导数。若泛函导数满足半负定，则时滞系统是稳定的。很明显，泛函导数的求取是影响结果保守性的直接因素。下面，我们将分别介绍直接构建型 L-K 泛函和完全 L-K 型泛函两类泛函如何求取和处理泛函导数。

对直接构建型 L-K 泛函来说，在求取泛函导数时都会产生负的积分项，如 $-\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds$ 。常用的方法有以下确定模型变换法、自由权矩阵方法、不等式技术以及凸组合方法等。

确定模型变换法：基于牛顿-莱布尼兹公式进行系统变换，目的是在求取泛函导

数时产生能够抵消积分项 $-\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)Q\dot{x}(s)ds$ 的交叉项。常用的模型变换法有基于 Park 不等式^[72]和 Moon 不等式^[73]的模型变换法以及广义系统模型变换法^[74]。两者均是等价变换，在变换上没有明显的区别，但后者在仿真实例上稍优于前者，是目前处理泛函导数常用的一种方法。以系统(1-4)为例，应用广义系统模型变换得，

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ y(t) = (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds. \end{cases} \quad (1-14)$$

用确定模型变换法处理泛函导数时，需要结合不等式的使用，如

$$-2a^T b \leq a^T X a - b^T X^{-1} b.$$

自由权矩阵方法：通过引入自由矩阵以增加稳定性判据的自由度。主要有两种方式：基于牛顿-莱布尼兹公式得到自由权矩阵等式^[48,75]，如

$$(x^T(t)N_1 + \dot{x}^T(t)N_2 + x^T(t-\tau)N_3) \times (x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds - x(t-h)) = 0. \quad (1-15)$$

基于系统方程得到自由矩阵等式，如由系统(1-4)可得

$$(x^T(t)N_1 + \dot{x}^T(t)N_2 + x^T(t-\tau)N_3) \times (\dot{x}(t) - Ax(t) - A_1 x(t-h)) = 0. \quad (1-16)$$

将得到的自由矩阵等式加到原有的 Lyapunov- Krasovskii 泛函导数上，可以增加稳定性判据的自由度，适用性强且不会带来任何的保守性。因此一经提出，便得到了广泛的应用。

不等式技术：不等式技术是目前时滞系统研究的主要方法。主要的思想是借助不等式技术将积分项放缩成 LMI 能够直接求解的二次型的形式。常用的积分不等式有 Jensen 不等式^[3,20]、Wirtinger 不等式^[18,19,26,33]、基于自由矩阵的不等式^[21]和 Bessel-Legendre 不等式^[34]等。显然，不等式技术的引入势必带来一定的保守性。随着不等式技术的发展，保守性不断降低，得到的稳定性判据也越来越接近于充分必要条件，但这是以计算复杂度的不断增加为代价的。

凸组合方法：凸组合方法主要是用于对时变时滞系统^[17,76]的研究和分析中。考虑 $0 \leq \tau(t) \leq h$ ，首先先将积分项 $-\int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds$ 拆分为 $-\int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds$ 与 $-\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)ds$ 两部分，然后利用不等式技术得到 $\Phi + \tau(t)X_1 + (h - \tau(t))X_2 < 0$ 形式的稳定性判据。由凸组合的性质得 $\Phi + \tau(t)X_1 + (h - \tau(t))X_2 < 0$ 等价于 $\Phi + hX_1 < 0$

和 $\Phi + hX_2 < 0$ 。显然，这样的稳定性判据相比之前的 $\Phi + hX_1 + hX_2 < 0$ ，在一定程度上可以降低保守性。

相比直接构建型 L-K 泛函，完全型 L-K 泛函导数的求取就比较简单了。完全型泛函的导数可以直接写成完全平方函数(1-12)的形式，通过证明存在一个正定完全平方函数与其相加为 0 来证明其负定性。这个过程不需要任何的数学变换和不等式技术，因此在泛函求取这部分不会产生任何的保守性。结合定理 1-2，若所构造的完全平方函数的形式(完全型 L-K 泛函)可以表示任意的完全平方函数，从理论上来看，基于完全型 L-K 泛函有可能得到线性时滞系统稳定的充分必要条件。这是完全型 L-K 泛函相较于直接构建型 L-K 泛函的优势。

1.3 基于 L-K 泛函的时滞系统稳定性研究存在的问题

虽然随着 L-K 泛函分析方法和 LMI 技术的发展，时滞系统的研究在近二十年来取得了一系列较好的成果^[77-82]。但是相对时滞的存在对时滞系统的研究和实际工程系统的控制分析带来的困难，仍存在着较多亟待解决的问题。

首先，现有文献大多将时滞系统用一类含时滞的常微分方程(Delayed ODE)来表示，忽视了时滞系统的时滞特性和无穷维特性。近年来学者们一直致力于如何更为充分地利用时滞系统自带的时滞特性以降低研究结果的保守性。虽然目前对于线性时滞系统，基于直接构建型 L-K 泛函与不等式放缩技术已经可以得到较好的结果^[89-90]，但是代价是计算复杂度的增高。另外为获得保守性较小的结果，这类方法需要针对不同的线性时滞系统调整、构造不同形式的 L-K 泛函，结合不同的不等式放缩技术，因此系统适应性较差。尤其是当系统结构变得复杂或者含有多个不同时滞时，这类方法便不再适用(所得结果的保守性较高或者计算、分析复杂度较高)。而现实生活中，系统中可能同时存在多个时滞，如采用集中控制的电力系统，多区域的电网连接组成一个大系统，不同区域到达中心控制器的网络诱导时滞不同；多智能体协同系统，各个智能体之间通过无线/有线网络传递信息，执行器动作时间等环节均会引入一定的时滞；多人淋浴系统，当多人分享同一蓄水池中的水，对每一位淋浴者来说水从蓄水池到达淋浴头需要经历距离不同，所经历的滞后时间便不同等等。然而据作者所知，对于线性多时滞系统的稳定性问题以及观测器设计研究，鲜少由文献进行研究；

其次，随着计算机技术的飞速发展，计算机成为了许多实际操作系统的一部分。

而计算机无法处理连续信号，因此需要采样、量化等环节，将连续信号化作数字信号，将连续时间系统转化为离散时间系统或者不完全的连续时间系统。因此对于这类实际工程系统，离散时间时滞系统的分析和研究成果更为有效和直接。对于离散时变时滞系统以及递归神经网络时滞系统的研究，大多数文献采用直接构建型 L-K 泛函的方法，使用 Wirtinger 求和不等式，而且需要结合凸组合法处理时滞，使得结果具有一定的保守性。

最后，考虑到非线性时滞系统在实际生活、生产广泛存在，我们常常需要使用 T-S 模糊时滞系统来模拟。然而目前对于 T-S 模糊时滞系统的研究，仍然是以直接构建型 L-K 泛函的方法为主。文献[81]构建了新的增广型 L-K 泛函，得到了确保 T-S 模糊时变时滞系统渐近稳定和镇定的充分条件，但使用的仍然是保守性较大的 Wirtinger 积分不等式。另外，考虑网络化环境，对于这类系统的采样控制的研究并不多，采样状态信息以及时滞信息利用不充分，使得结果具有一定的保守性。

1.4 本文的结构安排

论文采用 Lyapunov-Krasovskii 泛函的方法，并以 LMI 和 LOI 方法为基础，分别研究了线性和非线性时滞系统的稳定性问题，丰富和改进了现有的研究成果。本文的组织结构如图 1-2 所示。具体的内容安排如下：

第 1 章主要介绍了时滞系统的研究意义，时滞系统稳定性分析的研究现状，其中着重介绍了目前常用的几种 Lyapunov-Krasovskii 泛函的构建方法及泛函导数处理方法，以及相关研究存在的问题。

第 2 章主要介绍了本文研究所使用的 LMI 方法、LOI 方法，与 LOI 方法相应的 MATLAB 的 PIE 工具箱的使用方法。

第 3 章研究了一类含有离散、分布式时滞的连续线性多时滞系统的稳定性问题。借鉴基础状态概念，重构了其系统状态方程，构建偏积分(Partial Intergral, PI)算子形式的完全型 L-K 泛函，得到基于 LOI 的时滞相关稳定性判据。所得判据通过 MATLAB 的 PIE 工具箱求解得到系统稳定所允许的时滞上界，验证了所提方法的有效性。

第 4 章针对含传感器噪声的连续时间线性多时滞系统，设计了一类偏微分方程观测器。所设计的观测器改进了 Luenberger 观测器，可以同时修正对系统当前、历史状态的观测值。构建 PI 算子形式的完全型 L-K 泛函，得到满足时滞相关 H_∞ 鲁棒

性能指标的状态观测系统设计方法，所得判据以 LOI 形式给出。通过 MATLAB 的 PIE 工具箱求解得到其 H_∞ 范数界，验证了所提方法的有效性。

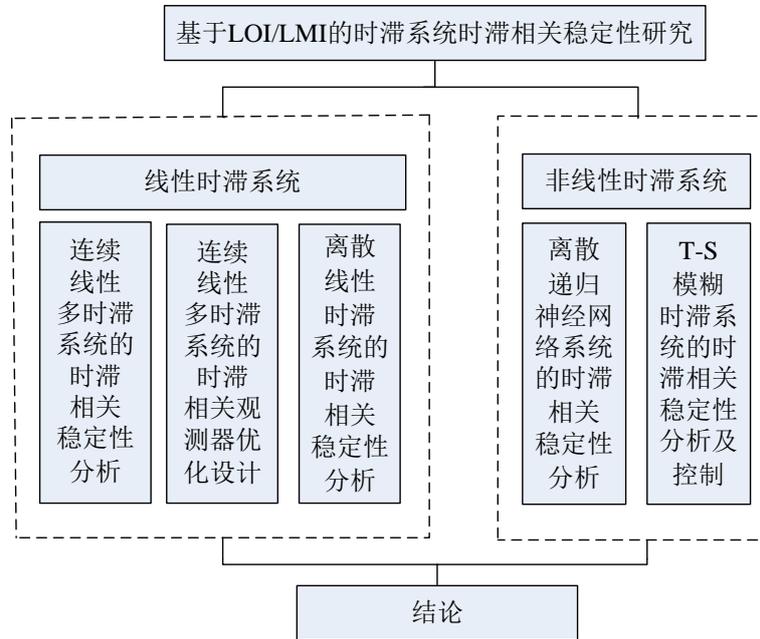


图 1-2 本文的组织结构

Fig. 1-2 The structure of this dissertation

第 5 章针对线性离散时滞系统的稳定性问题，提出新的求和不等式，构建直接构建型 L-K 泛函，结合新型求和不等式技术，得到相应的时滞相关稳定性判据。通过 MATLAB 的 LMI 工具箱求解得到系统稳定所允许的时滞上界，验证了稳定性判据的有效性。

第 6 章针对离散递归神经网络时滞系统的稳定性问题，构建直接构建型 L-K 泛函，结合改进的不等式技术，得到相应的时滞相关鲁棒稳定性判据。通过 MATLAB 的 LMI 工具箱求解系统稳定所允许的时滞上界，验证了结果的有效性。

第 7 章针对 T-S 模糊时滞系统的采样控制问题，借鉴环函数的思想，构建了新的泛函形式来判断 L-K 泛函的性质，从而放松了一直以来 L-K 泛函在整个时间运行域内单调递减的限制条件，得到新的时滞相关稳定性分析判据及控制器设计方法。通过 MATLAB 的 LMI 工具箱求解并验证所设计控制器的有效性。

最后，对全文的工作进行了总结，指出了本文的主要贡献及研究方法中存在的不足，并对今后的研究工作进行了展望。

第2章 LMI/LOI 方法

2.1 引言

本章介绍了两种处理凸优化问题的工具——LMI 方法和 LOI 方法，其中 LOI 方法是基于 SOS 理论最新的完全型泛函构建及实现方法。LMI 方法与 LOI 均可以用来有效、准确地分析和解决控制理论中的很多问题。鉴于 LMI 方法是大家所熟知的，我们将从 LMI 方法开始，简单介绍了 LMI 方法，重点介绍 LOI 方法，及 LOI 方法在 MATLAB 的实现——基于 SOS 工具箱的 PIE 工具箱的使用方法。

2.2 LMI 方法

线性矩阵不等式技术可以将所有的 LMI 问题看作凸优化问题，与 Lyapunov 理论结合可以有效、准确地分析和解决控制理论中的很多问题，一经提出便成为了如今控制理论中常用的分析和求解工具^[22]。早期的 Riccati 方程方法需要预先调整、选取参数矩阵，与 Riccati 方程方法相比，LMI 技术只需要将所有的问题化为相应的凸约束条件，然后借助 MATLAB 的 LMI 工具箱进行求解。这很大程度上提高了我们的求解效率，降低了求解问题的保守性。

一个标准的线性矩阵不等式具有以下形式，

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \leq 0, \quad (2-1)$$

其中， $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ 是一个实数向量，称为线性矩阵不等式(2-1)的决策向量， $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为一组给定实对称矩阵。 $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 是关于 x 的仿射函数。 $F(x) \leq 0$ ，表示矩阵半负定，即对于 $\xi \in \mathbb{R}^n$ ，有 $\xi^T F(x) \xi < 0$ 。不等式(2-1)为非严格线性矩阵不等式，当要求 $F(x) < 0$ 时，则称其为严格线性矩阵不等式。

经过适当的处理，系统控制中的很多问题都可以转化为标准线性矩阵不等式(2-1)的求解问题。如果能够获得满足式(2-1)的 x 的值，则称其为可行解，相反则这个不等式不可解。以常见的 Lyapunov 不等式为例，

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A^T P + PA + Q &\leq 0, \end{aligned} \quad (2-2)$$

其中, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为已知矩阵。式(2-2)是关于 P 的线性矩阵不等式, P 是需要求解的决策矩阵变量。因为 P 是对称矩阵, 所以实际的决策变量的个数是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 。令

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ * & x_{n+1} & \cdots & x_{2n+1} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & x_{n(n+1)/2} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

我们可以将式(2-2)写成标准 LMI (2-1)的形式如下,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= - \sum_{i=1}^{n(n+1)/2} x_i I_i < 0, \\ F_2(x) &= A^T \left(\sum_{i=1}^{n(n+1)/2} x_i I_i \right) + \sum_{i=1}^{n(n+1)/2} x_i I_i^T A + Q \leq 0. \end{aligned} \quad (2-4)$$

其中, $I_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 x_i 相应位置为 1, 其余位置为 0 的对称矩阵。若存在满足条件的 $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 构成 P 矩阵, 则说明此系统是稳定的, 若不存在, 则此系统的稳定性不能确保。得益于内点法的提出, 式(2-2)可以借助 MATLAB 的 LMI 工具箱直接求解, 这也使得线性矩阵不等式真正成为了解决系统控制问题的主要工具。

2.3 LOI 方法

因为本文使用的 LOI 方法是基于 SOS 方法的, 因此我们首先介绍 SOS 方法。

当 LMI 中出现矩阵函数时, 例如 F 为关于决策变量的矩阵函数, 或者决策变量本身为函数, 此时 LMI 技术已经不再适用, 平方和多项式技术应运而生。

一个标准的平方和多项式(SOS)具有如下形式^[23],

$$p(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x), \quad (2-5)$$

其中, $p(x)$ 和 $f_i(x) (i=1, 2, \dots, m)$ 为多项式函数。

显然, 若 $F(x)$ 是 SOS, 则对任意的 x , 有 $F(x) \geq 0$ 。因此, 若任意的多项式矩阵函数 $F(x)$ 可以利用平方和分解的思想化为 SOS, 则 $F(x) \geq 0$ 。虽然 SOS 条件只是判别多项式非负性的充分条件, 但从数值算例来看, 保守性较小。当然, 只有在 $p(x)$ 是偶次阶数的情况下, 这种平方分解的思想才可以应用。对于多项式的平方和分解问题有以下引理。

引理 2-1^[23]若多项式 $F(x)$ ($\deg(F(x)) = 2d$) 是 SOS, 当且仅当存在半正定矩阵 $Q \geq 0$ 以及单项式向量函数 $Z(x)$ ($\deg(F(x)) \leq d$), 使得,

$$F(x) = Z^T(x)QZ(x), \quad (2-6)$$

其中, $Z(x)$ 是关于 x 的单项式向量函数。

引理 2-2^[31] 若多项式 $S_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) 是 SOS, 定义 $F(x) = S_0(x) + \sum_{i=1} g_i(x)S_i(x)$, 则对任意的 $x \in S := \{x, g_i(x) \geq 0\}$, 有

$$F(x) \geq 0. \quad (2-7)$$

注 2-1 引理 2-1 给出了关于 x 的全局正定性条件, 引理 2-2 给出了关于 x 的局部正定性条件。

SOS 方法的提出为完全型泛函的构建提供了新的思路。Peet 基于 SOS 方法提出了完全型 L-K 泛函线性算子参数化的方法, 基于此方法构建的完全型泛函保守性极小, 因此所得到的结果基本接近充分必要条件, 但由于完全型泛函的待定参数为多项式矩阵函数参数, 而且需要推导、计算将所有约束化为 SOS 约束, 因此计算过程复杂繁琐。LOI 方法的提出便是为解决这一问题。LOI 方法允许最后的约束条件以类似线性矩阵不等式——线性算子不等式的形式给出, 允许矩阵参数取为算子参数。当 LOI 中的线性算子形式为特定的线性 PI 算子(见定义 2-1)时, 基于 SOS 工具箱, Peet 给出了相应的 MATLAB 的 PIE 工具箱, 可以直接求解这类 LOI, 大大简化了分析过程, 提高了求解效率。

本文中的 LOI 方法是基于线性 PI 算子给出的, 因此我们首先介绍线性 PI 算子。

定义 2-1^[28]若线性算子 $\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix}: Z_{m,n} \rightarrow Z_{p,q}$ 具有如下形式:

$$\left(\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} \right)(s) := \begin{bmatrix} Px + \int_{-1}^0 Q_1(s)\phi(s)ds \\ Q_2^T(s)x + R_0(s)\phi(s) + \int_{-1}^s R_1(s,\theta)\phi(\theta)d\theta + \int_s^0 R_2(s,\theta)\phi(\theta)d\theta \end{bmatrix}, \quad (2-8)$$

其中, 矩阵 $P \in \mathbb{R}^{p \times m}$, 矩阵函数 $Q_1 \in W_2^{p \times n}[-1,0]$, $Q_2 \in W_2^{q \times m}[-1,0]$, $R_0 \in W_2^{q \times n}[-1,0]$, $R_1 \in W_2^{q \times n}[[-1,0] \times [-1,0]]$ 和 $R_2 \in W_2^{q \times n}[[-1,0] \times [-1,0]]$, 则称这类线性算子为 4 偏积分(4 Partial Intergral, 4PI)算子。

注 2-2 本文中只涉及 4PI 算子, 为叙述方便, 我们简称其为偏积分(PI)算子。

基于所定义的 PI 算子, 我们可以将完全型 L-K 泛函写成 PI 算子内积的形式。例如下面的完全型 L-K 泛函,

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \int_{-1}^0 \begin{bmatrix} x(t) \\ \phi(t,s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & Q(s) \\ Q^T(s) & R_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \phi(t,s) \end{bmatrix} ds \\
 & + \int_{-1}^0 \int_{-1}^s \phi^T(t,s) R_1(s,\theta) \phi(t,\theta) d\theta ds \\
 & + \int_{-1}^0 \int_s^0 \phi^T(t,s) R_2(s,\theta) \phi(t,\theta) d\theta ds.
 \end{aligned} \tag{2-9}$$

可以写成 PI 算子内积的形式如下，

$$V(t) = \langle \mathcal{X}, \mathcal{P}\mathcal{X} \rangle_Z, \tag{2-10}$$

其中， $\mathcal{X}(s) := \begin{bmatrix} x^T(t), \phi^T(t,s) \end{bmatrix}^T \in Z$ ， $\mathcal{P} := \mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_i\} \end{bmatrix}$ 为 PI 算子，满足 $\mathcal{P}: Z \rightarrow Z$ 。

为研究系统的稳定性或者控制问题，我们需要保证式(2-10)的正定性及其导数的半负定性，求解 LOI 得到满足条件的 PI 算子 \mathcal{P} ，即相应的矩阵函数参数 P ， $Q(s)$ ， $R_0(s)$ ， $R_1(s,\theta)$ ，和 $R_2(s,\theta)$ ，甚至可能要求得 PI 算子 \mathcal{P} 的逆算子。

LMI 的运算规则是基于常数矩阵的，而 LOI 的运算规则是基于线性算子的。具体地，在本文中的 LOI 是基于 PI 算子的，相应的矩阵参数需要参数化方法可以得到。目前有相应的 MTALAB 的 PIE 工具箱可以直接求解这类 LOI，因此本文不作过多叙述，具体的运算参数化方法可参考文献[28]。这里给出了正定自共轭 PI 算子的参数化方法、逆 PI 算子的参数化方法及 PI 算子 Composition 的参数化方法。

1) 正定自共轭 PI 算子的参数化方法

引理 2-3^[77]对任意的多项式矩阵函数， $Z_1: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ ， $Z_2: [[-1,0] \times [-1,0]] \rightarrow \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ (Z_1 ， Z_2 阶数均可调) 和函数 $g(s) \geq 0$ ， $s \in [-1,0]$ ，若定义

$$\begin{aligned}
 P &= T_{11} \int_{-1}^0 g(s) ds, \\
 Q(s) &= g(s) T_{12} Z_1(s) + \int_s^0 g(\eta) T_{13} Z_2(\eta, s) d\eta + \int_{-1}^s g(\eta) T_{14} Z_2(\eta, s) d\eta, \\
 R_0(s) &= g(s) Z_1(s)^T T_{22} Z_1(s), \\
 R_1(s, \eta) &= g(s) Z_1(s)^T T_{23} Z_2(s, \eta) + g(\eta) Z_2(\eta, s)^T T_{24} Z_1(\eta) \\
 &\quad + \int_s^0 g(\theta) Z_2(\theta, s)^T T_{33} Z_2(\theta, \eta) d\theta + \int_\eta^s g(\theta) Z_2(\theta, s)^T T_{43} Z_2(\theta, \eta) d\theta \\
 &\quad + \int_{-1}^\eta g(\theta) Z_2(\theta, s)^T T_{44} Z_2(\theta, \eta) d\theta, \\
 R_2(s, \eta) &= g(s) Z_1(s)^T T_{32} Z_2(s, \eta) + g(\eta) Z_2(\eta, s)^T T_{24} Z_1(\eta) \\
 &\quad + \int_\eta^0 g(\theta) Z_2(\theta, s)^T T_{33} Z_2(\theta, \eta) d\theta + \int_s^\eta g(\theta) Z_2(\theta, s)^T T_{34} Z_2(\theta, \eta) d\theta \\
 &\quad + \int_{-1}^s g(\theta) Z_2(\theta, s)^T T_{44} Z_2(\theta, \eta) d\theta.
 \end{aligned} \tag{2-11}$$

其中,

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ * & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ * & * & T_{33} & T_{34} \\ * & * & * & T_{44} \end{bmatrix} > 0, \quad (2-12)$$

且 $T_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $T_{22} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$, $T_{33} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ 和 $T_{44} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$, 则对任意的 $\begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} \in Z_{m,n}$, PI 算

子 $\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_i\} \end{bmatrix}: Z_{m,n} \rightarrow Z_{m,n}$ 满足

$$\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_i\} \end{bmatrix} > 0, \quad (2-13)$$

特殊地, 当 $i=1,2,3$ 时, 令 $T_{i4}=T_{i3}$, $T_{4i}=T_{3i}$, 和 $T_{44}=T_{33}$, 可得 $R_1(s, \theta) = R_2(s, \theta)$ 。此时得特殊的正定自共轭 PI 算子—— $\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}$ 。

注 2-3 引理 2-3 引入了函数 $g(s)$, 多项式矩阵函数 $Z_2: [-1,0] \times [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ 和 $Z_1: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, 其中 $Z_1(s)$, $Z_2(s, \theta)$ 的引入是为了构建多项式矩阵函数 $Q(s)$, $R_0(s)$, $R_1(s, \theta)$ 和 $R_2(s, \theta)$ 。 $g(s)$ 的引入是为了确保 $s \in [-1,0]$, 应用引理 2-2, 在实际求解过程中, 通常令 $g(s)=1$ 和 $g(s)=s(s+1)$, 分别构建正定 PI 算子, 将二者的和作为最终的正定 PI 算子。据此, 我们给出如下引理:

引理 2-4^[30] 若存在 PI 算子 $\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_i\} \end{bmatrix}: Z_{m,n} \rightarrow Z_{m,n}$ 的矩阵参数 P, Q, R_0, R_1, R_2 满足

$$\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_i\} \end{bmatrix} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} P_1, & Q_1 \\ Q_1^T, & \{R_{1i}\} \end{bmatrix} + \mathcal{P} \begin{bmatrix} P_2, & Q_2 \\ Q_2^T, & \{R_{2i}\} \end{bmatrix}, \quad (2-14)$$

其中, $\mathcal{P} \begin{bmatrix} P_1, & Q_1 \\ Q_1^T, & \{R_{1i}\} \end{bmatrix}$ 为满足引理 2-3 且令 $g(s)=1$ 所得的 PI 算子, $\mathcal{P} \begin{bmatrix} P_2, & Q_2 \\ Q_2^T, & \{R_{2i}\} \end{bmatrix}$ 为满足引理 2-3 且令 $g(s)=s(s+1)$ 所得的 PI 算子。显然有

$$\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_i\} \end{bmatrix} > 0。$$

2) 逆 PI 算子的参数化方法:

定义 2-2 若对任意 $\mathcal{X} \in X$, 存在线性算子 $\mathcal{P}_1: X \rightarrow X$ 和 $\mathcal{P}_2: X \rightarrow X$ 满足

$$\mathcal{X} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \mathcal{X} = \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{X}, \quad (2-15)$$

则称 \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 互为逆算子, 即 $\mathcal{P}_1^{-1}=\mathcal{P}_2$ 或者 $\mathcal{P}_2^{-1}=\mathcal{P}_1$ 。

定理 2-1^[30] 若 PI 算子 \mathcal{P} 满足有界、正定和自共轭, 则 \mathcal{P}^{-1} 存在, 且满足有界、正定和自共轭。

注 2-4 虽然有界、正定和自共轭 PI 算子的逆算子的存在性毋庸置疑, 但是由于 PI 算子本身结构的复杂性(含有两个 Kernel 部分, $R_1(s, \theta)$ 和 $R_2(s, \theta)$), 目前来说, PI 算子逆算子的参数化方法仍然是一个很大的挑战, 有待后续的研究。但是当 PI 算子的两个 Kernel 部分相等时, 即 $R_1(s, \theta)=R_2(s, \theta)$, 目前已有其逆算子的参数化方法。

这里仅给出 $\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}$ 的逆算子参数化方法。下面给出相应的引理。

引理 2-5^[71] 假设有界、正定和自共轭 PI 算子 $\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}$ 满足 $Q(s)=HY(s)$, $R(s, \theta)=Y^T(s)\Gamma Y(\theta)$, 其中 $Y(s)$ 是阶数为 d 的单项式向量函数, Γ 是对称矩阵。令

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^0 Y(s)\hat{R}_0(s)^{-1}Y(s)^T ds, \\ \hat{H} &= P^{-1}H(KH^T P^{-1}H - I - K\Gamma)^{-1}, \\ \hat{\Gamma} &= -(\hat{H}^T H + \Gamma)(I + K\Gamma)^{-1}. \end{aligned} \quad (2-16)$$

若我们定义

$$\begin{aligned} \hat{P} &= (I - \hat{H}KH^T)P^{-1}, \\ \hat{R}_0(s) &= R_0(s)^{-1}, \\ \hat{Q}(s) &= \hat{H}Z(s)\hat{R}_0(s), \\ \hat{R}(s, \theta) &= \hat{R}_0(s)Y(s)^T \hat{\Gamma} Y(\theta)\hat{R}_0(\theta). \end{aligned} \quad (2-17)$$

然后, 构建 $\hat{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \begin{bmatrix} \hat{P}, & \hat{Q} \\ \hat{Q}^T, & \{\hat{R}_0, \hat{R}_1, \hat{R}_1\} \end{bmatrix}$, 则有 $\hat{\mathcal{P}}=\hat{\mathcal{P}}^*$, 且对任意 $\mathcal{X} \in X$, 满足

$$\mathcal{X}=\hat{\mathcal{P}}\mathcal{P}\mathcal{X}=\mathcal{P}\hat{\mathcal{P}}\mathcal{X}. \quad (2-18)$$

此时, \mathcal{P} , $\hat{\mathcal{P}}$ 互为逆算子, 记 $\mathcal{P}^{-1}=\hat{\mathcal{P}}$ 。

注 2-5 在基于 PI 算子框架对无限维系统的分析研究中, 需要构建完全型 L-K 泛函 $V = \langle \mathcal{X}, \mathcal{P}\mathcal{X} \rangle$, 其中 \mathcal{P} 为有界、正定和自共轭 PI 算子。若在研究中不要求取

\mathcal{P} 的逆算子, 如稳定性分析问题, 则定义 \mathcal{P} 为任意满足引理 2-4 的正定自共轭 PI 算子(不要求 $R_1(s, \theta) = R_2(s, \theta)$); 若在研究中需要取 \mathcal{P} 的逆算子, 如控制器设计或者观测器设计问题, 则需要定义 \mathcal{P} 为满足引理 2-4 的特殊正定自共轭 PI 算子

$$\mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}^\circ$$

3) PI 算子 Composition 的参数化方法

引理 2-6^[77] 对于 PI 算子 $\mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} A, B_1 \\ B_2, \{C_i\} \end{matrix} \right\}: Z_{p_1, q_1} \rightarrow Z_{p, q}$ 和 $\mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} P, Q_1 \\ Q_2, \{R_i\} \end{matrix} \right\}: Z_{m, n} \rightarrow Z_{p_1, q_1}$,

其中矩阵 A, P , 多项式矩阵函数 B_1, B_2, Q_1, Q_2, C_i 和 R_i 满足相应的维数条件, 则对任意 $\begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} \in Z_{m, n}$,

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} \hat{P}, \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2, \{\hat{R}_i\} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} (s) := \mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} A, B_1 \\ B_2, \{C_i\} \end{matrix} \right\} \mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} P, Q_1 \\ Q_2, \{R_i\} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} (s), \quad (2-19)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{P} &= AP + \int_{-1}^0 B_1(s)Q_2(s)ds, \\ \hat{Q}_1(s) &= AQ_1(s) + B_1(s)R_0(s) + \int_s^0 B_1(\eta)R_1(\eta, s)d\eta \\ &\quad + \int_{-1}^s B_1(\eta)R_2(\eta, s)d\eta, \\ \hat{Q}_2(s) &= B_2(s)P + C_0(s)Q_2(s) + \int_{-1}^s C_1(s, \eta)Q_2(\eta)d\eta \\ &\quad + \int_s^0 C_2(s, \eta)Q_2(\eta)d\eta, \\ \hat{R}_0(s) &= C_0(s)R_0(s), \\ \hat{R}_1(s, \theta) &= B_2(s)Q_1(\theta) + C_0(s)R_1(s, \theta) + C_1(s, \theta)R_0(\theta) \\ &\quad + \int_{-1}^\theta C_1(s, \eta)R_2(\eta, \theta)d\eta + \int_\theta^s C_1(s, \eta)R_1(\eta, \theta)d\eta \\ &\quad + \int_\theta^0 C_2(s, \eta)R_1(\eta, \theta)d\eta, \\ \hat{R}_2(s, \theta) &= B_2(s)Q_1(\theta) + C_0(s)R_2(s, \theta) + C_2(s, \theta)R_0(\theta) \\ &\quad + \int_{-1}^s C_1(s, \eta)R_2(\eta, \theta)d\eta + \int_s^\theta C_2(s, \eta)R_2(\eta, \theta)d\eta \\ &\quad + \int_\theta^0 C_2(s, \eta)R_1(\eta, \theta)d\eta. \end{aligned} \quad (2-20)$$

注 2-6 关于 PI 算子的运算规则, 我们仅介绍以上大家可能更关心的三种规则,

另外还有如何求取其共轭算子，如何求取和算子等，但实际上目前已有相应 MATLAB 的 PIE 工具箱直接进行求取，因此不再一一介绍，感兴趣的读者可以参考文献[28]。

2.4 PIE 工具箱

PIE 工具箱是 SOS 工具箱的一种扩展，被用来计算、求解一些与多项式变量相关的运算问题。用户需要定义相关的参数和变量以及约束条件，然后建立 SOS 程序来解决问题。SOS 工具箱与 PIE 工具箱可在 <https://codeocean.com/capsule/7653144/> 获得。

利用 SOS 工具箱来解决包含不等式约束条件的 SOS 问题，即 SOS 的可行解问题以及其线性目标最小问题。若我们定义单项式向量函数 $Z_s(x)$ ($\deg(Z_s(x)) = 2d$)，则可以构建一个常数矩阵 C 使得 $F(x) = CZ_s(x)$ ，此时 SOS 问题转化为 LMI 问题。每个 SOS 问题都可以转换成等价的半正定规划问题。SOS 规划问题的求解实际上是将其转换为可由 SeDumi 和 SDPT 求解的半正定规划问题。利用 MATLAB 的 SOS 工具箱可以将 SOS 规划问题转换为半正定规划问题，再将半正定规划问题的解还原成 SOS 规划问题的解。具体求解过程如图 2-1 所示。

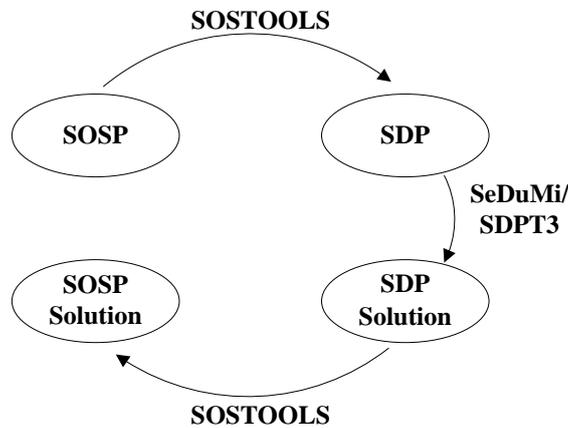


图 2-1 SOS 工具箱求解过程

Fig. 2-1 The solution process using SOSTOOLS

在 SOS 工具箱的基础上，Peet 教授和 Sachin 拓展出了 PIE 工具箱。PIE 工具箱是为求解 PI 算子不等式所给出的。文献[29,30,71]中，应用了 PI 算子构建完全型泛函，但是文中给出的凸约束条件是用户手动执行转化为 LMI/SOS 约束的。PIE 工具箱的提出解放了人们的双手，如图 2-2 所示，所有约束都在后台被重新定义为 LMI

约束，转化为等效的半定约束条件，并由选定的 SDP 求解器求解。从 SDP 求解器得到的解将通过 SOS 工具箱再转换为 PIE 格式以提高实用性。

为简化 PIE 程序编写过程，除了求解算子程序外，PIE 工具箱还加载了诸如加法、结合、共轭运算的参数化工具。虽然将算子不等式转换为基于 SOS 工具箱可求解的约束或直接转换为 SDP 的任务可以由用户手动执行，但是计算过程较为复杂，需要改变积分顺序、计算多重积分等等。PIE 工具箱可以作为计算器，为用户处理这些操作，大大减少了用户理解和实现这些转换的工作量。

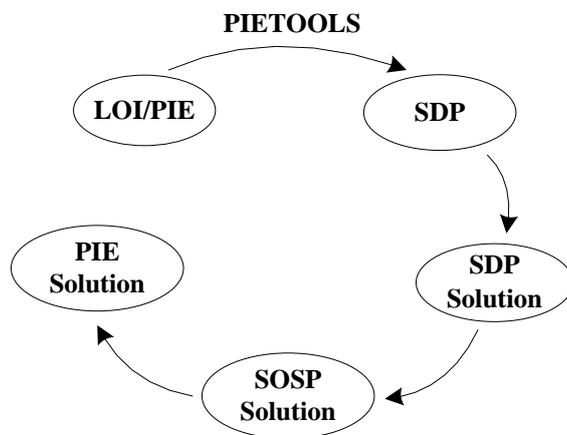


图 2-2 PIE 工具箱求解过程

Fig. 2-2 The solution process using PIETOOLS

除此之外，PIE 工具箱结合 SOS 工具箱可以求解具有 LOI 约束的可行性检验和优化问题。以下为具体实现步骤：

- 1) 定义多项式和算子变量；
- 2) 在 SOS 工具箱和相关 SOS 程序变量中初始化 SOS 程序；
- 3) 陈述算子值约束；
- 4) 将线性目标设置为最小化目标(可选)；
- 5) 调用求解器；
- 6) 获得可行解。

下面给出一个 PIE 工具箱解决问题的示例以及部分代码片段，简单展示 PIE 工具箱的使用方法。

例 2-1 对 volterra 积分算子

$$(\mathcal{A}x)(s) = \int_0^s x(t)dt,$$

求取其最小 L_2 增益范数, 即 $\min\{\sqrt{\gamma} \mid \langle Ax, Ax \rangle \leq \gamma \langle x, x \rangle, \forall x \in L_2[a, b]\}$ 。

显然, 简化可得相应的优化问题是:

$$\begin{aligned} & \min \sqrt{\gamma}, \\ & \text{s.t. } \mathcal{A}^* \mathcal{A} \leq \gamma. \end{aligned}$$

此问题可以通过 PIE 工具箱来解决, 因为算子 \mathcal{A} 可以很容易地被转换为 PI 算子。首先, 定义标识符:

```
>> pvar s theta gamma;
>> opvar A; A.R.R2 = -1;
```

初始化了一个以 s , θ 为符号变量, γ 为决策变量的 SOS 程序。最小化目标函数可以通过下面的代码确定。

```
>> prog = sosprogram([s,theta],[gamma]);
>> prog = sosdecvar(gamma);
```

然后通过以下代码定义不等式约束 $\mathcal{A}^* \mathcal{A} - \gamma \leq 0$ 。

```
>> P = sosposopvar(prog,dim);
>> prog = sosopeq(prog, P+A'*A - gamma);
```

最后, 使用以下命令求解程序并得到可行解

```
>> prog = sossolve(prog);
>> Gam = sosgetsol(prog, gamma);
>> disp(sqrt(Gam));
```

所得解为 $\text{ans} = 0.6366$, 与理论分析值 $2/\pi$ 近似相等。但理论分析值得计算通常需要长时间的计算求解和验证。PIE 工具箱还可用于为一些著名的不等式(如 Wirtinger 不等式、Poincare 不等式、Jensen 不等式等等)提供正定性或负定性的证明。

2.5 本章小结

本章介绍了本文所使用的 LMI 方法及 LOI 方法。这里的 LOI 方法是基于线性 PI 算子的线性算子不等式方法, 着重介绍了求解 LOI 的 MATLAB 的 PIE 工具箱。但由于 LOI 方法是最近提出、正在完善中的方法, 本文只将其应用在连续线性时滞系统的分析研究中(本文的第 3 章和第 4 章), 而对于离散时滞系统和非线性时滞系统(本文的第 5 章、第 6 章和第 7 章)仍然是基于较为成熟的 LMI 方法给出的。

第3章 连续线性多时滞系统的时滞相关稳定性 分析

本章研究连续线性时滞系统的稳定性问题，基于 LOI 方法得到相应的时滞相关稳定性判据。首先，将线性多时滞系统重构成考虑基础状态 ODE-PDE 方程表达式，然后将其用分布式参数系统进行描述，并针对相应的分布式参数系统构建 PI 算子内积形式的完全型 L-K 泛函，得到了 LOI 形式的线性多时滞系统的稳定性判据，所得结果可以通过 MATLAB 的 PIE 工具箱求解。最后，数值仿真验证了本章所得结果的有效性及其优越性。

3.1 引言

LMI 技术和 L-K 泛函分析方法的发展使得时滞系统的研究在近二十年里涌现了大量的研究成果。大部分文献将时滞系统方程用常微分方程来表示，通过构建适当的直接构建型 L-K 泛函，利用不断改进的不等式技术，研究了时滞系统稳定性和控制问题，以减小结果的保守性^[79-82]。例如文献[78,83]分别利用基于自由矩阵的积分不等式技术以及 Besse-Legendre 不等式技术，得到了保守性较小的具有离散时滞的线性连续时滞系统稳定性条件。

然而时滞系统实质上是一种无限维系统。由于 LMI 技术的局限性，以及直接构建型泛函结构的特定性，上述研究成果需要将时滞系统无限维的特性转化为有限维，导致时滞系统的时滞特性并没有被完全利用到。考虑到构建完全型 L-K 泛函能够充分利用无限维系统的特性并且可能得到充分必要条件^[42]，一些学者开始将其应用到时滞系统的研究中。Gu 等提出了离散化构建方法，并得到了 LMI 形式的时滞系统稳定性判据，所得结果接近于充分必要条件，但是缺点是计算复杂度高，模式单一，无法应用于含不确定性或者时变参数系统的研究^[69]；Peet 等提出了多项式函数形式的完全型泛函构建方法，并基于此得到了一系列的研究成果^[84-87]，分别研究了时滞系统的稳定性问题、观测器设计以及控制器设计问题。在文献[29,30]中，时滞系统被写成一类常微分方程与偏微分方程耦合(ODE-PDE)的形式，利用 PDE 部分将我们

常常忽略的系统状态情况呈现出来，而后基于半群理论将其写成无时滞形式的分布参数系统(Distributed Parameter System, DPS)来研究，使得现有的一些线性无时滞理论成果得以应用，只需要将相应的 LMI 形式换成相应的线性算子不等式，简化分析过程。但仍然需要利用线性参数化方法将所得结果以 LMI 的形式给出，计算复杂度较高。最近，文献[88]针对 PDE 系统中提出了基础状态的概念，以基础状态空间来描述 PDE 系统，可以将界值条件嵌入到系统方程中，大大简化了系统分析过程及计算过程。本章将借鉴文献[88]提出的基础状态概念及最近的 LOI 框架来研究线性多时滞系统的稳定性问题。

3.2 连续线性多时滞系统模型

考虑如下的线性多时滞系统，

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^K A_{1i} x(t - \tau_i) + \sum_{i=1}^K \int_{-\tau_i}^0 A_{2i}(s) x(t+s) ds, \quad (3-1)$$

其中， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量，对任意 $i=1, 2, \dots, K$ ，假设时滞 $\tau_i > 0$ ，且对任意 $i \neq j$ ，有 $\tau_i \neq \tau_j$ ， $i, j \in [1, 2, \dots, K]$ 。 A_0 ， A_{1i} 为适当维数的系统参数矩阵， $A_{2i}: [-\tau_i, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 为系统参数矩阵函数。

当时滞出现在系统的状态变量中时，这样的时滞称为离散时滞(discrete delay)；当时滞出现在积分界值中时，这样的时滞称为分布式时滞(distributed delay)。当 $A_{1i} \neq 0$ 且 $A_{2i} = 0$ 时，系统退化为仅含离散时滞的系统(retarded system)；当 $A_{1i} = 0$ 且 $A_{2i} \neq 0$ 时，系统称为分布式时滞系统。若 $K=1$ ， A_{2i} 为常数矩阵时，系统(3-1)退化为如下时滞系统，

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_{11} x(t - \tau) + A_{21} \int_{-\tau}^0 x(t+s) ds, \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3-2)$$

显然，系统(3-2)仅含有一个时滞，结构较为简单，文献[18,19,83]均研究了系统(3-2)的稳定性问题，得到了保守性较小的结果。而系统(3-1)结构复杂，可以描述多重时滞、两种时滞并存的复杂时滞系统。虽然我们可以试图将关于线性单时滞系统稳定性研究的思想推广到对多时滞系统的研究中，但简单的推广可能导致保守性，而且会伴随着推导、计算量的大幅度增长。据作者所知，在目前时滞系统的相关文献中，鲜少有针对系统(3-1)的稳定性研究。本章将基于完全型 L-K 泛函和 LOI 方

法研究系统(3-1)的稳定性。由于 LOI 方法是基于 DPS 系统的研究结果的，我们首先将所研究的系统进行 DPS 化。

3.3 系统 DPS 化

为使分析过程更为清晰，给出本小节所需要的符号标识如下，

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= A_0 + \sum_{i=1}^K A_{1i} + \sum_{i=1}^K \int_{-1}^0 \tau_i A_{2i}(\tau_i s) ds, \\ \hat{A}_2(s) &= \left[A_{11} + \tau_1 \int_{-1}^s A_{21}(\tau_1 \eta) d\eta, \dots, A_{1K} + \tau_K \int_{-1}^s A_{2K}(\tau_K \eta) d\eta \right], \\ H &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2} I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\tau_K} I \end{bmatrix}, \\ \hat{I} &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & I & \dots & I \end{bmatrix}^T}_{K \times n}. \end{aligned} \quad (3-3)$$

首先，考虑时滞系统的无限维特性，我们将系统(3-1)重构成考虑基础状态的 ODE-PDE 方程，过程分为以下三步：

1) PDE 部分

定义向量函数 $\phi_i(t, s) = x(t + s\tau_i)$ ， $s \in [-1, 0]$ ，则 $\phi_i(t, s)$ 可以表示时滞系统(3-1)的第 i 个时滞通道的历史状态。显然，对 $\phi_i(t, s)$ 的定义可以等效于

$$\phi_i(t, 0) = x(t), \quad (3-4)$$

$$\phi_{it}(t, s) = \frac{1}{\tau_i} \phi_{is}(t, s), \quad (3-5)$$

其中，式(3-4)称为界值条件，式(3-5)称为微分条件。定义

$$\phi(t, s) = \left[\phi_1^T(t, s), \phi_2^T(t, s), \dots, \phi_K^T(t, s) \right]^T \in L_2^{nK}, \quad (3-6)$$

其中， $\phi_i(t, s) = x(t + s\tau_i)$ 。同理得，对 $\phi(t, s)$ 的定义可以等效于

$$\phi(t, 0) = \hat{I}x(t), \quad (3-7)$$

$$\phi_t(t, s) = H\phi_s(t, s), \quad (3-8)$$

其中, 式(3-7)称为界值条件, 式(3-8)称为微分条件。这是 PDE 方程的常见形式, 界值条件(3-7)影响 PDE 方程的求解, 但并不出现在微分条件(3-8)中, 导致 PDE 方程求解困难。借鉴文献[88]提出的基础状态的概念, 基于微积分运算规则, 应用式(3-7)得

$$\begin{aligned}\phi(t, s) &= \phi(t, 0) - \int_s^0 \phi_\eta(t, \eta) d\eta \\ &= \hat{I}x(t) - \int_s^0 \phi_\eta(t, \eta) d\eta.\end{aligned}\quad (3-9)$$

进而, 将式(3-9)与式(3-8)联立, 得

$$\hat{I}\dot{x}(t) - \int_s^0 \dot{\phi}_\eta(t, \eta) d\eta = H\phi_s(t, s).\quad (3-10)$$

则式(3-10)实现了界值条件与微分条件的一体化。

注 3-1 与文献[30]中定义 $\phi_i(t, s) = x(t+s)$ 不同, 我们定义向量函数 $\phi_i(t, s) = x(t+s\tau_i)$ 。这是为了统一积分项的上下界, 使得 $s \in [-1, 0]$, 而时滞项仅出现在系统方程的矩阵参数中, 而不是积分上下界里。这一点将大大简化后续的分析以及求解过程。

2) ODE 部分

基于微积分运算规则, 对任意函数 $g(s): [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\tau_i}^0 g(s)x(t+s)ds &= \int_{-1}^0 \tau_i g(\tau_i s)x(t+\tau_i s)ds \\ &= \int_{-1}^0 \tau_i g(\tau_i s)\phi_i(t, s)ds \\ &= \int_{-1}^0 \tau_i g(\tau_i s)\phi_i(t, 0)ds - \int_{-1}^0 \tau_i g(\tau_i s)\int_s^0 \phi_{\eta\eta}(t, \eta)d\eta ds \\ &= \left(\int_{-1}^0 \tau_i g(\tau_i s)ds\right)x(t) - \int_{-1}^0 \left(\tau_i \int_{-1}^s g(\tau_i \eta)d\eta\right)\phi_{is}(t, s)ds.\end{aligned}\quad (3-11)$$

由式(3-9)和式(3-11)成立, 得系统(3-1)的 ODE 部分如下,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^K A_{1i} x(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^K \int_{-\tau_i}^0 A_{2i}(s)x(t+s)ds \\ &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^K A_{1i} (x(t) - \int_{-1}^0 \phi_{is}(t, \eta)d\eta) + \sum_{i=1}^K \left(\int_{-1}^0 \tau_i A_{2i}(\tau_i s)ds\right)x(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^K \int_{-1}^0 \left(\tau_i \int_{-1}^s A_{2i}(\tau_i \eta)d\eta\right)\phi_{is}(t, s)ds \\ &= \left(A_0 + \sum_{i=1}^K A_{1i} + \sum_{i=1}^K \int_{-1}^0 \tau_i A_{2i}(\tau_i s)ds\right)x(t)\end{aligned}\quad (3-12)$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^K \int_{-1}^0 (A_{1i} + \tau_i \int_{-1}^s A_{2i}(\tau, \eta) d\eta) \phi_{is}(t, s) ds \\
 & = \hat{A}_1 x(t) - \int_{-1}^0 \hat{A}_2(s) \phi_s(t, s) ds.
 \end{aligned}$$

3) PDE-ODE 方程

基于文献[88]提出的基础状态的概念, 定义 $x_f(t) = [x^T(t), \phi_s^T(t, s)]^T \in Z_{n,nK}$, 联立 PDE 和 ODE 部分所得的式(3-10)和(3-12), 得系统(3-1)写成 PDE-ODE 方程如下,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \hat{I}\dot{x}(t) - \int_s^0 \dot{\phi}_\eta(t, \eta) d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 x(t) - \int_{-1}^0 \hat{A}_2(s) \phi_s(t, s) ds \\ H \phi_s(t, s) \end{bmatrix}. \quad (3-13)$$

引理 3-1 若 $x(t)$ 满足式(3-1), 则 $x(t)$ 和 $\phi(t, s)$ 满足式(3-13), 其中 $\phi(t, s)$ 满足式(3-7)和式(3-8)。

注 3-2 由引理 3-1 可知, 系统(3-1)和(3-13)具有相同的解 $x(t)$ 。因此系统(3-13)与系统(3-1)关于 $x(t)$ 具有相同的稳定性表现, 可以通过研究系统(3-13)的稳定性来研究系统(3-1)的稳定性。

进而, 我们将所得的 ODE-PDE 方程(3-13)表示为 DPS 形式,

$$\mathcal{T} \dot{x}_f(t) = \mathcal{A} x_f(t), \quad (3-14)$$

其中, $x_f(t) = [x^T(t), \phi_s^T(t, s)]^T \in Z_{n,nK}$, 线性算子 $\mathcal{T}: Z_{n,nK} \rightarrow Z_{n,nK}$, $\mathcal{A}: Z_{n,nK} \rightarrow Z_{n,nK}$ 。

由第 2 章给出的 PI 算子的定义(2-8), 得 \mathcal{T} , \mathcal{A} 具体形式如下,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} I, & 0 \\ \hat{I}, & \{0, 0, -I_{nK}\} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{A} &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} \hat{A}_1, & -\hat{A}_2 \\ 0, & \{H, 0, 0\} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \quad (3-15)$$

其中, \hat{A}_1 , \hat{A}_2 , H 和 \hat{I} 如式(3-3)所示。由式(3-3)和式(3-15)可知, 线性 PI 算子 \mathcal{T} 是确定的、时滞无关的, \mathcal{A} 是时滞相关的。

引理 3-2 若 $x(t)$ 满足式(3-1), 则 $x(t)$ 满足式(3-14), 其中 \mathcal{T} , \mathcal{A} 满足 $\mathcal{T}: Z_{n,nK} \rightarrow Z_{n,nK}$, $\mathcal{A}: Z_{n,nK} \rightarrow Z_{n,nK}$ 和式(3-15), $\phi(t, s)$ 满足式(3-7)和式(3-8)。

证明 显而易见的是系统(3-13)和 DPS 系统(3-14)具有相同的解空间。若 $x(t)$ 满足式(3-1), 由引理 3-1 可知, $x(t)$ 和 $\phi(t, s)$ 满足式(3-13), 进一步地, $x(t)$ 和 $\phi(t, s)$ 满

足式(3-14)。证毕。

3.4 主要结果

由引理 3-2 可知, 针对 DPS 系统(3-14)的研究结果适用于系统(3-1)。而系统(3-14)的稳定性分析是相对简单的, 基于这样的思想, 本小节将基于新的 LOI 方法和 DPS 系统的分析结果研究系统(3-1)的稳定性问题, 为叙述简便, 我们首先给出 DPS 系统的稳定性分析方法。然后利用 DPS 系统的稳定性分析方法得到系统(3-1)的时滞相关稳定性判据。

3.4.1 DPS 系统的稳定性分析

考虑下述 DPS 系统,

$$T \dot{x}_f(t) = Ax_f(t), \quad (3-16)$$

其中, $x_f \in X_f$, 线性算子 $T: X_f \rightarrow Z$, $A: X_f \rightarrow Z$ 。针对该 DPS 系统, 我们给出以下稳定性判据。

定理 3-1 假设存在线性算子 $\mathcal{P}: Z \rightarrow Z$ 是有界的、正定的和自共轭的, 使得对任意的 $x_f \in X_f$, 有下式成立,

$$T^* \mathcal{P} A + A^* \mathcal{P} T < 0, \quad (3-17)$$

则系统(3-16)是渐近稳定的。

证明 构建 L-K 泛函如下

$$V(x_f) = \langle T x_f, \mathcal{P} T x_f \rangle_Z. \quad (3-18)$$

首先, 由于 \mathcal{P} 是正定算子, 因此存在正常值 δ , 使得 $V(x_f) \geq \delta \|x_f\|^2$ 。L-K 泛函的正定性得以保证。

其次, 沿系统(3-16)的轨迹, 对 $V(x_f)$ 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_f) &= \langle T x_f, \mathcal{P} T \dot{x}_f \rangle_Z + \langle T \dot{x}_f, \mathcal{P} T x_f \rangle_Z \\ &= \langle T x_f, \mathcal{P} A x_f \rangle_Z + \langle A x_f, \mathcal{P} T x_f \rangle_Z \\ &= \langle x_f, (T^* \mathcal{P} A + A^* \mathcal{P} T) x_f \rangle_Z. \end{aligned} \quad (3-19)$$

由式(3-17)可得, $\dot{V}(x_f) \leq 0$ 。由 L-K 泛函稳定性理论可得, 系统(3-16)是渐近稳定的。证毕。

注 3-3 显然，DPS 系统的形式与一般 ODE 类似，因此其稳定性研究结果与一般 ODE 的稳定性研究结果类似，只是允许其中相应的矩阵参数为算子参数，这一点可以扩展到 DPS 系统的控制、观测器设计等等研究中。这是我们使用 DPS 系统作为时滞系统研究“中介”的原因，通过将时滞系统转化成 DPS 系统，系统形式以及研究结果都将以一种简单、干净的形式来呈现。值得注意的是，具体的系统参数都被封装在算子参数中，因此后续的求解和实现过程仍然是跟算子参数的复杂性相关联的。

3.4.2 时滞相关稳定性判据

由引理 3-2 可知，我们可以通过研究系统(3-14)的稳定性来研究系统(3-1)的稳定性。借助 3.3.1 给出的 DPS 稳定性分析判据，本小节构建 PI 算子内积形式的完全型泛函，得到系统(3-1)的 LOI 形式的时滞相关稳定性判据。

定理 3-2 假设存在矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，多项式矩阵函数 $Q \in W_2^{n \times nK}[-1,0]$ ， $R_0 \in W_2^{nK \times nK}[-1,0]$ ， $R_1 \in W_2^{nK \times nK}[[-1,0] \times [-1,0]]$ ，和 $R_2 \in W_2^{nK \times nK}[[-1,0] \times [-1,0]]$ ，使得 PI 算子 $\mathcal{P} := \mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q_1 \\ Q_2, & \{R_i\} \end{bmatrix}$ 满足引理 2-4 和

$$T^* \mathcal{P} A + A^* \mathcal{P} T < 0, \quad (3-20)$$

其中， A ， T 的定义如式(3-15)所示，则系统(3-1)满足渐近稳定。

证明 由定理 3-1 知，若式(3-20)成立，则系统(3-16)满足渐近稳定。若 A ， T 的定义如式(3-15)所示，且定义 $x_f(t) = [x^T(t), \phi_s^T(t, s)]^T \in Z_{n, nK}$ ，则系统(3-16)可以用来表示系统(3-14)，由引理 3-2 可知，若系统(3-14)满足渐进稳定，则系统(3-1)满足渐近稳定。证毕。

注 3-4 基于直接构建型 L-K 泛函和 LMI 方法对时滞系统进行的研究，需要针对不同的时滞系统调整 L-K 泛函，结合不等式放缩技术而引入新的保守性。然而本章提出的定理 3-2 则适用于任何可以转化成 DPS 系统(3-16)的时滞系统，系统适用性强。同时定理 3-2 中所要求解的参数变量为关于 s 的多项式函数，其阶数可调，增大了求解域，结果可优化。

3.5 数值算例

由于现有文献对线性多时滞系统的研究成果并不多，但是当系统退化为式(3-1)

的形式时，有较多文献结果可以引用比较。因此为验证定理 3-2 的有效性及其正确性，我们首先研究了两个典型的线性单时滞系统的仿真案例。

例 3-1 考虑如下连续线性时滞系统，

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-\tau)。$$

该系统是很典型的时滞的存在给系统的稳定性带来积极影响的实例。当时滞 τ 为 0 时，该系统为无时滞系统，计算可得该系统方程的特征根存在正实部，该系统发散。当系统存在时滞(τ 不为 0)时，系统反而存在相应的稳定域，文献[3]指出该系统稳定的理论分析界为 $\tau \in [0.100169, 1.7178]$ 。

我们应用定理 3-2，建立了基于 LOI 的系统稳定性与时滞取值之间的关系，使用 MATLAB 中的 PIE 工具箱求解出该系统稳定所允许的时滞区间为 $\tau \in [0.100169, 1.7178]$ 。显然，应用定理 3-2 所求解的结果达到了文献[3]指出的理论分析区间，精确度高达小数点后四位，保守性极小。

进一步，我们给出了当系统状态初始值为 $x(0) = [0.2; 0.2]$ (当 $\tau=1.7178$ 时，令 $x(s) = 0, s \in [-1.7178, 0)$)， $\tau=0$ 和 $\tau=1.7178$ 的状态变化曲线，分别如图 3-1 和图 3-2 所示。从图中显然可得，当 $\tau=0$ 时，系统是发散的；当 $\tau=1.7178$ 时，系统满足渐近稳定。

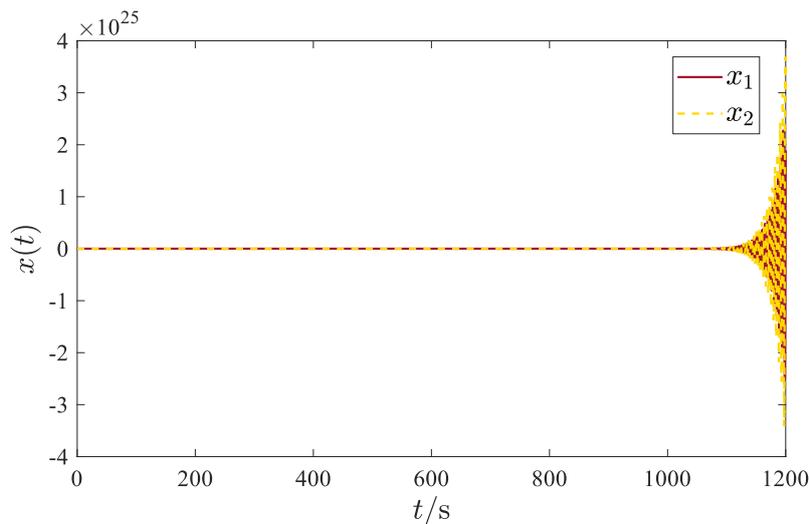


图 3-1 $\tau=0$ 时系统状态轨迹

Fig. 3-1 The response of the state variables when $\tau=0$

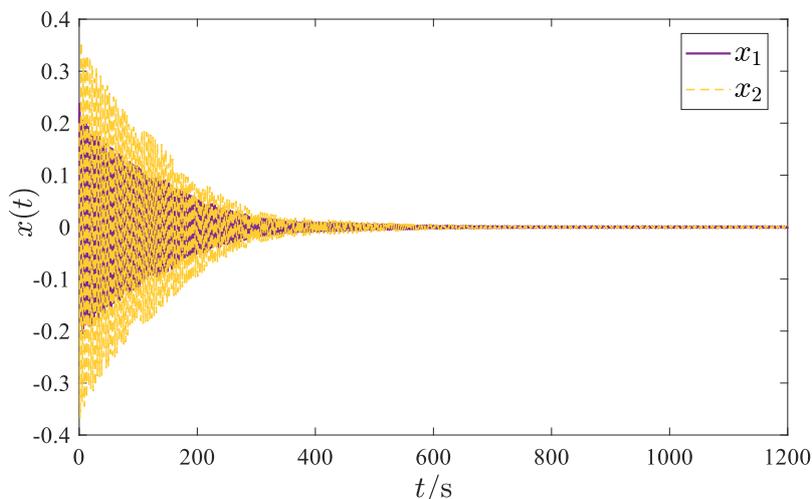


图 3-2 $\tau=1.7178$ 时系统状态轨迹

Fig. 3-2 The response of the state variables variables when $\tau=1.7178$

例 3-2 考虑如下连续线性时滞系统,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \int_{-\tau}^0 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t+s) ds.$$

文献 [3] 给出了该系统稳定的理论分析界为 $\tau \in [0.2000, 2.0412]$ 。应用定理 3-2, 通过 MATLAB 中的 PIE 工具箱求解出了该系统在稳定前提下所允许的时滞区间。所得结果以及相关文献的结果均呈现在表 3-1 中。从表 3-1 可以看出, 应用定理 3-2 所得结果达到了文献 [3] 所得的理论分析界, 精确度极高。

表 3-1 最大允许时滞区间

Table 3-1 The maximum admissible upper range τ

方法	结果
文献[19]	[0.2000, 1.8770]
文献[18]	[0.2000, 1.9504]
文献[83]	[0.2000, 2.0395]
文献[90]	[0.2000, 2.0402]
定理 3-2	[0.2000, 2.0412]

注 3-5 例 3-1 和例 3-2 是时滞系统稳定性研究中两个被广泛引用和比较的数值案例。对于这两个线性定常单时滞系统, 基于直接构建型 L-K 泛函、保守性较小的不等式放缩技术, 结合 LMI 方法, 目前已经可以给出较好的结果, 例如针对例 3-1

的时滞系统，文献[83]给出了 $\tau \in [0.100169, 1.7122]$ ，文献[89]给出了 $\tau \in [0.100169, 1.7177]$ ；针对例 3-2 的时滞系统，文献[83]给出了 $\tau \in [0.100169, 2.0395]$ ，文献[90]给出了 $\tau \in [0.2000, 2.0402]$ 。但是相较于本章的结果，仍然存在一定的保守性。

另外，定理 3-2 还可以应用到分布式时滞反馈矩阵为矩阵函数和线性多时滞系统的稳定性研究中。例 3-3 考虑了当 A_{2i} 为矩阵函数时滞系统的稳定性问题，例 3-4 考虑了系统含有双时滞时的稳定性问题。

例 3-3 考虑如下连续线性时滞系统，

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.01 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \int_{-\tau}^0 \begin{bmatrix} -1+0.3s & 0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t+s) ds。$$

在文献[3]中给出该系统稳定的理论分析界为 $\tau \in [0.195, 1.71]$ 。而应用定理 3-2，通过 MATLAB 中的 PIE 工具箱求解出了该系统在稳定前提下所允许的时滞区间为 $\tau \in [0.195, 1.71]$ ，达到了理论分析值的结果。

例 3-4 考虑如下连续线性时滞系统，

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \int_{-\tau_1}^0 \begin{bmatrix} 3 & 2.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(t+s) ds + \int_{-\tau_2}^0 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t+s) ds，$$

且有 $\tau_1 = \frac{1}{2}\tau_2$ 。

文献[3]中指出该系统在时滞小于 2 的情况下满足渐近稳定。应用定理 3-2，通过 MATLAB 中的 PIE 工具箱求解出了该系统在稳定前提下所允许的时滞 τ_2 的上界为 1.999，保守性较小。

注 3-6 定理 3-2 是通过构建 PI 算子内积形式的完全型 L-K 泛函所得的。应用定理 3-2 进行数值仿真时， \mathcal{P} 算子是基于多项式函数构建的，其中多项式函数的阶数可调。假设这个阶数为 d (实际上可能不止含有一个阶数，且取值可以不同，但为简化讨论，这里只用 d 代替)，则 d 的数值可以反映结果的精确性， d 越大，所得的结果越精确。

注 3-7 由于完全型泛函本身的待定参数是矩阵函数，且在构建 L-K 泛函方面上不产生保守性，相比直接构建型泛函，求解域显著增大，并且可实现寻优，因此是最可能得到充分必要条件的方法，所得到的结果保守性趋近于 0，这一点从本章的仿真实例中得到了验证。PIE 工具箱的出现极大地简化了我们的计算分析过程，使得原本需要复杂的 LMI/SOS 呈现的结果能够以 LOI 的形式呈现和计算，大幅度降

低了研究者分析和计算过程的复杂度。

3.6 本章小结

本章讨论了一类含有连续线性时滞系统的稳定性问题。考虑基础状态概念，将线性多时滞系统以一种新的状态方程表达式给出，然后将其写成 DPS 的形式。针对 DPS 系统形式的线性多时滞系统，构建 PI 算子内积形式的完全型 L-K 泛函，得到了 LOI 形式的时滞相关稳定性判据。所得结果通过 MATLAB 的 PIE 工具箱求解。最后给出数值算例验证了所提方法的有效性和精确性，最高精确度可达到其小数点后四位。

第 4 章 连续线性多时滞系统的时滞相关优化观测器设计

本章研究具有传感器噪声的线性多时滞系统的 H_∞ 状态观测器的设计问题。所设计的状态观测器是一个偏微分方程，不仅可以修正对于时滞系统的当前状态估计值，还可以修正多个时滞通道的系统历史的状态估计值。通过将线性多时滞系统以及所构建的状态观测器写成考虑基础状态的 DPS 系统形式，构建 PI 算子内积形式的完全型 L-K 泛函，得到了 LOI 形式的 H_∞ 状态观测器的设计方法。通过 MATLAB 的 PIE 工具箱进行求解。数值仿真验证了所提方法的有效性和优越性。

4.1 引言

状态观测器设计在实际工程系统应用中具有重要的意义。在工程应用中，很多系统的状态是不可测量或者完全跟踪的，利用原系统中可直接测量得到的输入或输出信息，构建一个状态观测系统，实现状态重构，利用状态观测值替代原系统的状态，实现对原系统的状态反馈控制。显然，观测器的精确程度将直接影响状态反馈控制的性能表现。同时，随着人们对工业控制的精确性要求不断提高，时滞现象不可忽略，时滞系统的状态观测问题引起了广泛的关注。如何进一步优化时滞系统的观测器设计、有效抑制外部干扰对于观测性能的影响一直是这一研究领域的热门方向^[91,92]。

对于线性系统的状态重构问题，常用的分析方法是 Lyapunov 函数方法，将构造的状态观测器系统与原系统做差，得到观测误差动态系统，通过所构造的误差系统状态来判定观测器性能的优异与否。基于 Lyapunov 函数方法，文献[93]研究了含状态时滞和输出时滞的线性离散时间系统的观测器设计问题，并给出了其观测器存在性的充分必要条件；文献[94]针对含输出时滞的时变时滞系统设计了线性区间观测器，实现了误差动态系统的非负性和对原系统状态的有效估计。文献[95]研究了含不确定参数干扰的线性时滞系统的 H_∞ 观测器设计问题。文献[96]研究了具有不可测输入和干扰的线性系统的观测器设计问题，提出了广义的 H_∞ 动态观测器设计方法。文献[97]讨论了离散时间广义系统的 H_∞ 观测器设计问题。大多数的文献结果都

是针对简单的线性单时滞系统研究的，构建的 Lyapunov 方法是直接构建型 L-K 泛函，所得的判据是以 LMI 形式给出的。虽然所设计的 H_∞ 观测器可以在一定程度上抑制干扰对观测效果的影响，但仍然有较大的进步空间。

基于 SOS 方法，文献[30]研究了线性多时滞系统的 H_∞ 观测器设计问题。引入了新的矩阵多项式函数形式的观测器增益矩阵，大大改善了 Luenberger 观测器，可以有效抑制外部干扰对观测效果的影响，可以修正对过去一段时间的状态函数的观测值。但是所设计的新的观测器形式结构复杂，计算过程繁冗。同时，实际工程系统中，传感器常常受到现场环境的影响，传感器噪声以及可能存在的输出时滞不可忽视，当其不可忽略时，这种方法便不再适用。

4.2 连续线性多时滞系统模型

考虑一类连续时间线性时滞系统如下，

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^K A_i x(t - \tau_i) + B w(t), \\ z(t) &= C_{10} x(t) + \sum_{i=1}^K C_{1i} x(t - \tau_i) + D_1 w(t), \\ y(t) &= C_{20} x(t) + \sum_{i=1}^K C_{2i} x(t - \tau_i) + D_2 w(t), \end{aligned} \quad (4-1)$$

其中， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态， $w(t) \in L_2^r$ 是外部干扰输入， $y(t) \in \mathbb{R}^q$ 是测量输出， $z(t) \in \mathbb{R}^p$ 是调节输出。 $A_0, A_i, B, C_{10}, C_{1i}, C_{20}, C_{2i}, D_1$ 和 D_2 是具有适当维度的常数矩阵。假设时滞 $\tau_i > 0$ ，且对任意 $i \neq j$ ，有 $\tau_i \neq \tau_j$ ， $i, j \in [1, 2, \dots, K]$ 。

与文献[30]考虑的时滞系统相比，本章考虑了传感器噪声以及输出时滞的情况，系统结构更为复杂，也更为接近实际工程系统的情况。为使所设计的状态观测器输出能够更好地跟踪、显示被观测系统的状态变化，需要尽量减少外部干扰对状态观测器的观测效果带来的影响，我们给出如下设计目标：

1) 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ 时，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$ ，其中， $x(t)$ 为实际系统状态， $\hat{x}(t)$

为观测器系统状态，观测误差系统满足渐近稳定；

2) 在零初始条件下，存在正常值 γ ，对任意 $w(t) \in L_2^r$ ，有 $\|\hat{z} - z\|_{L_2} \leq \gamma \|w\|_{L_2}$ ，其中， $z(t)$ 为实际系统的调节输出， $\hat{z}(t)$ 为观测器系统的调节输出，所设计的状态观测器满足 H_∞ 性能指标。

注 4-1 γ 的取值反映了外部干扰对状态观测器的观测效果带来的影响的大小。显然，为最小化外部干扰对状态观测器的观测效果带来的影响，所设计的状态观测器在满足以上两个设计目标的前提下， γ 越小越好。

由于本章对系统(4-1)的观测器设计研究是基于 LOI 方法的，而 LOI 方法是基于 DPS 系统的研究给出的。为叙述简便，我们首先给出 DPS 系统的观测器设计方法。

4.3 DPS 系统优化观测器设计

考虑下述 DPS 系统，

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \dot{x}_f(t) &= \mathcal{A}x_f(t) + \mathcal{B}w(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}_1 x_f(t) + D_1 w(t), \\ y(t) &= \mathcal{C}_2 x_f(t) + D_2 w(t), \end{aligned} \quad (4-2)$$

其中，线性算子 $\mathcal{T}: X_f \rightarrow Z$ ， $\mathcal{A}: X_f \rightarrow Z$ ， $\mathcal{B}: W \rightarrow Z$ ， $\mathcal{C}_1: X_f \rightarrow \mathbb{R}$ ， $\mathcal{C}_2: X_f \rightarrow \mathbb{R}$ ， D_1 ， D_2 为常数矩阵。

针对 DPS 系统(4-2)，构建观测器如下，

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \dot{\hat{x}}_f(t) &= \mathcal{A}\hat{x}_f(t) + \mathcal{L}(\mathcal{C}_2 \hat{x}_f(t) - y(t)), \\ \hat{z}(t) &= \mathcal{C}_1 \hat{x}_f(t), \\ \hat{y}(t) &= \mathcal{C}_2 \hat{x}_f(t), \end{aligned} \quad (4-3)$$

其中， $\mathcal{L}: Y \rightarrow Z$ 。通过构建系统观测器，使得 $\|\hat{z} - z\|_{L_2} \leq \gamma \|w\|_{L_2}$ ，我们的优化目标是 minimize 外部干扰对于观测性能带来的影响，求取 γ_{\min} 。定义 $e_f(t) = \hat{x}_f(t) - x_f(t)$ ，联立式(4-2)和(4-3)，得观测误差系统如下，

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \dot{e}_f(t) &= (\mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{C}_2)e_f(t) - (\mathcal{B} + \mathcal{L}D_2)w(t), \\ z_e(t) &= \mathcal{C}_1 e_f(t) - D_1 w(t). \end{aligned} \quad (4-4)$$

假设 $e_f(0) = 0$ 。我们给出 DPS 系统(4-2)的优化观测器设计判据如下。

定理 4-1 假设存在正常值 γ ，线性 PI 算子 $\mathcal{P}: Z \rightarrow Z$ 满足有界、正定和自共轭和 $\mathcal{Z}: Y \rightarrow Z$ 满足如下优化条件，

$$\begin{aligned} &\min \gamma, \\ &s.t. \begin{bmatrix} -\gamma I & -D_1^T & -(\mathcal{P}\mathcal{B} + \mathcal{Z}D_2)^* \mathcal{T} \\ * & -\gamma I & \mathcal{C}_1 \\ * & * & (\mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{Z}\mathcal{C}_2)^* \mathcal{T} + \mathcal{T}^* (\mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{Z}\mathcal{C}_2) \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (4-5)$$

则线性算子 \mathcal{P}^{-1} 存在且有界，相应的观测器增益算子由 $\mathcal{L}=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Z}$ 确定，系统(4-4)满足 $\|z_e\|_{L_2} \leq \gamma \|w\|_{L_2}$ 。

证明 构建 L-K 泛函如下，

$$V(e_f)=\langle T e_f, \mathcal{P} T e_f \rangle_{\mathcal{Z}}, \quad (4-6)$$

由于 \mathcal{P} 是正定的，因此有对任意的 $\delta > 0$ ，满足 $V(e_f) \geq \delta \|e_f\|^2$ 。定义 $\mathcal{Z}=\mathcal{P}\mathcal{L}$ 。沿系统(4-4)轨迹，对 $V(e_f)$ 求导得，

$$\begin{aligned} & \dot{V}(e_f) - \gamma \|w\|^2 - \gamma \|v_e\|^2 + \langle v_e, z_e \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle z_e, v_e \rangle_{\mathcal{Z}} \\ &= \langle T e_f, (\mathcal{P}A + \mathcal{Z}C_2) e_f \rangle_{\mathcal{Z}} + \langle (\mathcal{P}A + \mathcal{Z}C_2) e_f, T e_f \rangle_{\mathcal{Z}} \\ & \quad - \langle T e_f, (\mathcal{P}B + \mathcal{Z}D_2) w \rangle_{\mathcal{Z}} - \langle (\mathcal{P}B + \mathcal{Z}D_2) w, T e_f \rangle_{\mathcal{Z}} \\ & \quad - \gamma \|w\|^2 - \gamma \|v_e\|^2 + \langle v_e, C_1 e_f \rangle + \langle C_1 e_f, v_e \rangle - \langle v_e, D_1 w \rangle - \langle D_1 w, v_e \rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} w \\ v_e \\ e_f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\gamma I & -D_1^T & -(\mathcal{P}B + \mathcal{Z}D_2)^* T \\ * & -\gamma I & C_1 \\ * & * & (\mathcal{P}A + \mathcal{Z}C_2)^* T + T^* (\mathcal{P}A + \mathcal{Z}C_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v_e \\ e_f \end{bmatrix} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4-7)$$

其中， $v_e = \frac{1}{\gamma} z_e$ 。若式(4-5)成立，则

$$\dot{V}(e_f(t)) - \gamma \|w\|^2 + \frac{1}{\gamma} \|z_e\|^2 < 0, \quad (4-8)$$

对式(4-8)从 0 到 t 积分得，

$$V(e_f(t)) - V(e_f(0)) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t \|z_e(s)\|^2 ds \leq \gamma \int_0^t \|w(s)\|^2 ds. \quad (4-9)$$

由 $V(e_f(0))=0$ 且 $V(e_f(t)) \geq 0$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时，得 $\|z_e\|_{L_2} \leq \gamma \|w\|_{L_2}$ 。值得注意的是，

此时若 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ 成立，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_f(t) = 0$ ，观测误差系统(4-4)满足稳定。证毕。

4.4 主要结果

首先，我们考虑基础状态的概念，将线性多时滞系统表示为 ODE-PDE 系统形式；针对 ODE-PDE 系统形式的线性多时滞系统，我们构建 ODE-PDE 形式的观测系统，而不是简单的常微分方程，所构建的观测系统可以同时修正对系统当前以及

历史状态的观测值。然后我们将被观测系统以及所构建的观测系统以 DPS 的形式表示出来，通过借助给出的 DPS 的 H_∞ 观测器设计方法，构建 PI 算子内积形式的完全型泛函，得到 LOI 形式的时滞相关 H_∞ 观测器设计判据。

4.4.1 观测器构建

首先，为使分析过程更为清晰，给出本小节所需要的符号标识如下，

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_2} I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\tau_K} I \end{bmatrix}, \\
 \hat{I} &= \underbrace{[I \quad I \quad \cdots \quad I]^T}_{K \times n}, \\
 \tilde{A} &= [A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_K], \\
 \tilde{C}_1 &= [C_{11} \quad C_{12} \quad \cdots \quad C_{1K}], \\
 \tilde{C}_2 &= [C_{21} \quad C_{22} \quad \cdots \quad C_{2K}].
 \end{aligned}$$

考虑“基础状态”的概念，将系统(4-1)写成 ODE-PDE 的形式如下，

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_p &= \begin{bmatrix} \left(A_0 + \sum_i A_i \right) x(t) - \int_{-1}^0 \tilde{A} \phi_s(t, s) ds \\ H \phi_s(t, s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bw(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 z(t) &= (C_{10} + \sum_i C_{1i})x(t) - \tilde{C}_1 \int_{-1}^0 \phi_s(t, s) ds + D_1 w(t), \\
 y(t) &= (C_{20} + \sum_i C_{2i})x(t) - \tilde{C}_2 \int_{-1}^0 \phi_s(t, s) ds + D_2 w(t),
 \end{aligned} \tag{4-10}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 x_p &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{I}x(t) - \int_s^0 \phi_\eta(t, \eta) d\eta \end{bmatrix}, \\
 \phi(t, s) &= [\phi_1^T(t, s), \phi_2^T(t, s), \dots, \phi_K^T(t, s)]^T,
 \end{aligned} \tag{4-11}$$

$x(t)$ 是时滞系统的状态向量， $w(t)$ 是系统外部干扰；对任意 $s \in [-1, 0]$ ， $\phi(t, s)$ 是时滞系统 K 个时滞通道的历史状态， $\phi_i(t, s) = x(t + s\tau_i)$ 。

注 4-2 因为将系统(4-1)写成 ODE-PDE 方程形式的过程与第 3 章内 3.3 中将系统(3-1)写成 ODE-PDE 方程的过程相类似, 因此这里省略了具体的过程。

引理 4-1 若 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 满足式(4-1), 则 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, 和 $\phi(t,s)$ 满足式(4-10), 其中 $\phi(t,s)$ 的定义由式(4-11)给出, 且 $\phi_i(t,s) = x(t + s\tau_i)$ 。

注 4-3 由引理 4-1 可知, 系统方程(4-1)和(4-10)具有相同的解 $x(t)$, $y(t)$, 和 $z(t)$ 。因此系统(4-10)与系统(4-1)具有相同的性能表现, 可以通过研究系统(4-10)来研究系统(4-1)。

针对系统(4-10), 我们构建 ODE-PDE 形式的观测器系统如下,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_p &= \begin{bmatrix} \left(A_0 + \sum_i A_i \right) \hat{x}(t) - \int_{-1}^0 \tilde{A} \hat{\phi}_s(t,s) ds \\ H \hat{\phi}_s(t,s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 y_e(t) \\ L_2(s) y_e(t) \end{bmatrix}, \\ \hat{z}(t) &= (C_{10} + \sum_i C_{1i}) \hat{x}(t) - \tilde{C}_1 \int_{-1}^0 \hat{\phi}_s(t,s) ds, \\ \hat{y}(t) &= (C_{20} + \sum_i C_{2i}) \hat{x}(t) - \tilde{C}_2 \int_{-1}^0 \hat{\phi}_s(t,s) ds, \end{aligned} \quad (4-12)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{x}_p &= \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{I} \hat{x}(t) - \int_s^0 \hat{\phi}_\eta(t,\eta) d\eta \end{bmatrix}, \\ \hat{\phi}(t,s) &= \left[\hat{\phi}_1^T(t,s), \hat{\phi}_2^T(t,s), \dots, \hat{\phi}_K^T(t,s) \right]^T, \\ y_e(t) &= \hat{y}(t) - y(t). \end{aligned} \quad (4-13)$$

$\hat{x}(t)$ 是观测器的状态, 即对所观测系统(4-1)的状态估计值; 对任意 $s \in [-1,0]$, $\hat{\phi}(t,s)$ 是对所观测系统(4-1)的 K 个时滞通道的历史状态估计值; L_1 和 $L_2(s)$ 是设计的观测器增益矩阵(函数)。显然, L_1 可以修正观测器对原系统当前状态的估计值, 而 $L_2(s)$ 可以修正观测器对原系统历史状态的估计值。

4.4.2 系统 DPS 化

对于系统(4-10), 定义基础状态 $x_f(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \phi_s(t,s) \end{bmatrix}$, 相应地, 对系统(4-12), 定义 $\hat{x}_f(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{\phi}_s(t,s) \end{bmatrix}$ 。显然, $x_f \in Z_{n,nK}$, $\hat{x}_f \in Z_{n,nK}$ 。我们将系统(4-10)和观测系统(4-12)

分别写成(4-2)和(4-3)的 DPS 形式。

由 PI 算子的定义得知, $\mathcal{A}: Z_{n,nK} \rightarrow Z_{n,nK}$, $\mathcal{B}: \mathbb{R}^r \rightarrow Z_{n,nK}$, $\mathcal{C}_1: Z_{n,nK} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathcal{C}_2: Z_{n,nK} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\mathcal{T}: Z_{n,nK} \rightarrow Z_{n,nK}$, 和 $\mathcal{L}: \mathbb{R}^q \rightarrow Z_{n,nK}$, 且

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} I, & 0 \\ \hat{I}, & \{0, 0, -I_{nK}\} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{A} &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} A_0 + \sum_i A_i, & -\tilde{A} \\ 0, & \{0, H, 0\} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{B} &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} B, & 0 \\ 0, & \{0\} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{C}_1 &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} C_{10} + \sum_i C_{1i}, & -\tilde{C}_1 \\ 0, & \{0\} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{C}_2 &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} C_{20} + \sum_i C_{2i}, & -\tilde{C}_2 \\ 0, & \{0\} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{L} &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} L_1, & 0 \\ L_2, & \{0\} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4-14}$$

引理 4-2 假设 \mathcal{T} , \mathcal{A} 满足 $\mathcal{T}: Z_{n,nK} \rightarrow Z_{n,nK}$, $\mathcal{A}: Z_{n,nK} \rightarrow Z_{n,nK}$ 和式(4-14), $\phi(t,s)$ 满足式(4-11), 且 $\phi_i(t,s) = x(t + s\tau_i)$, 则若 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 满足式(4-1), 则 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, 和 $\phi(t,s)$ 满足式(4-2); 若 $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, $\hat{z}(t)$ 满足式(4-12), 则 $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, $\hat{z}(t)$ 和 $\hat{\phi}(t,s)$ 满足式(4-3)。

证明 易知, 当 \mathcal{T} , \mathcal{A} , $\phi(t,s)$ 满足上述条件时, 系统(4-10)和 DPS 系统(4-2)具有相同的解空间, 由引理 4-1 可知, 若 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 满足式(4-1), $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, 和 $\phi(t,s)$ 满足式(4-10), 进一步地, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, 和 $\phi(t,s)$ 满足式(4-2)。此外, 易得系统(4-12)和 DPS 系统(4-3)具有相同的解空间, 因此若 $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, $\hat{z}(t)$ 满足式(4-12), 则 $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, $\hat{z}(t)$ 和 $\hat{\phi}(t,s)$ 满足式(4-3)。

另外, 对定理 4-1 中使用的 PI 算子 \mathcal{Z} , \mathcal{P} , 我们定义

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z} &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} Z_1, & 0 \\ Z_2, & \{0\} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{P} &:= \mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

注 4-4 所定义的 PI 算子 \mathcal{Z} 具有与 PI 算子 \mathcal{L} 相同的结构, 因为 $\mathcal{L}=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Z}$, 由引理 2-6 可知, 这种定义方式可以确保所得 \mathcal{L} 满足式(4-14)中对 \mathcal{L} 的定义, 满足我们所构建的 H_∞ 状态观测器(4-12)所需要的形式。

注 4-5 所定义的 PI 算子 \mathcal{P} 要求 $R_2(s,\theta)=R_1(s,\theta)$ 。这是因为在求取观测器增益算子 \mathcal{L} 时需要求取 \mathcal{P}^{-1} 。正如第 2 章逆 PI 算子的参数化方法部分的介绍, 在目前的研究中, 只有当 $R_2(s,\theta)=R_1(s,\theta)$ 成立时, 才可以通过引理 2-5 求取 PI 算子 \mathcal{P} 的逆算子。这样的限制条件可能会带来保守性, 但是从本章的数值仿真案例来看, 对仿真结果并没有太大的影响。对于 $\mathcal{P}:=\mathcal{P}\begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_2\} \end{bmatrix}$ 的逆算子的参数化方法目前还没有相应的方法给出, 有待日后的研究。

4.4.3 时滞相关观测器设计判据

首先, 我们给出了当 \mathcal{Z}, \mathcal{P} 的定义满足式(4-15)时, 观测器增益算子 \mathcal{L} 的参数化方法, 验证若 $\mathcal{L}=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Z}$, 则 \mathcal{L} 的结构满足(4-14), 可以构建出我们所设计的观测器系统(4-12)。然后, 由引理 4-2 可知, 针对 DPS 系统(4-2)的研究结果适用于系统(4-1), 而系统(4-2)的 H_∞ 观测器设计策略已经由定理 4-1 给出, 因此本小节我们将借助定理 4-1, 得到基于 LOI 的系统(4-1)的 H_∞ 观测器设计策略。

定理 4-2 若 $\mathcal{L}=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Z}$, 其中 PI 算子 $\mathcal{P}:=\mathcal{P}\begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}$ 满足定理 2-1, $\mathcal{Z}:=\mathcal{P}\begin{bmatrix} Z_1, & 0 \\ Z_2, & \{0\} \end{bmatrix}$, 其中 Z_2 为多项式函数满足 $Z_2(s)=Z^T(s)W$ 。则 \mathcal{P}^{-1} 存在, \mathcal{P}^{-1} 的结构由引理 2-5 给出。若定义

$$\begin{aligned} X(s) &= \hat{R}_0(s)Z^T(s), \\ T &= \int_{-1}^0 Z(s)\hat{R}_0(s)Z^T(s)ds, \end{aligned}$$

则得 $\mathcal{L}=\mathcal{P}\begin{bmatrix} L_1, & 0 \\ L_2, & \{0\} \end{bmatrix}$, 其中,

$$\begin{aligned} L_1 &= \hat{P}Z_1 + \hat{H}TW, \\ L_2(s) &= X(s)(\hat{H}^T Z_1 + \hat{\Gamma}TW)。 \end{aligned} \tag{4-16}$$

证明 若 PI 算子 $\mathcal{P}:=\mathcal{P}\begin{bmatrix} P, & Q \\ Q, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}$ 满足定理 2-1, 则 \mathcal{P}^{-1} 存在, \mathcal{P}^{-1} 的结构

由引理 2-5 给出。由引理 2-6 可得 \mathcal{L} 。证毕。

定理 4-3 假设存在正常值 γ ，常数矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，多项式矩阵函数 $Q \in W_2^{n \times nK}[-1, 0]$ ， $R_0 \in W_2^{nK \times nK}[-1, 0]$ ， $R_1 \in W_2^{nK \times nK}[[-1, 0] \times [-1, 0]]$ ，常数矩阵 $Z_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ，多项式矩阵函数 $Z_2 \in W_2^{nK \times q}[-1, 0]$ ，使得 PI 算子 $\mathcal{P} := \mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}$ 满足定理 2-1 和 $\mathcal{Z} := \mathcal{P} \begin{bmatrix} Z_1, & 0 \\ Z_2, & \{0\} \end{bmatrix}$ ，满足如下优化条件，

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{s.t.} \begin{bmatrix} -\gamma I & -D_1^T & -(\mathcal{P}B + \mathcal{Z}D_2)^* T \\ * & -\gamma I & C_1 \\ * & * & (\mathcal{P}A + \mathcal{Z}C_2)^* T + T^* (\mathcal{P}A + \mathcal{Z}C_2) \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (4-17)$$

其中， A ， B ， C_1 ， C_2 和 T 定义如式(4-14)，且相应观测器增益算子满足 $\mathcal{L} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{Z}$ 。定义 $z_e(t) = \hat{z}(t) - z(t)$ ，其中 $z(t)$ 和 $\hat{z}(t)$ 分别为系统(4-10)和观测系统(4-12)的解，则 $z_e(t)$ 满足

$$\|z_e\|_{L_2} \leq \gamma \|w\|_{L_2}。$$

证明 若 PI 算子 $\mathcal{P} := \mathcal{P} \begin{bmatrix} P, & Q \\ Q^T, & \{R_0, R_1, R_1\} \end{bmatrix}$ 满足定理 2-1，则 \mathcal{P}^{-1} 存在。由引理 2-5，可以求得 \mathcal{P}^{-1} 的具体形式；进而，由定理 4-2 得 $\mathcal{L} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} L_1, & 0 \\ L_2, & \{0\} \end{bmatrix}$ ，满足式(4-14)中对 \mathcal{L} 的定义。

由定理 4-1 知，若式(4-17)成立，则式(4-2)和式(4-3)的解满足 $\|z_e\|_{L_2} \leq \gamma \|w\|_{L_2}$ ，其中， $z_e(t) = \hat{z}(t) - z(t)$ ， $z(t)$ 和 $\hat{z}(t)$ 分别满足式(4-2)和式(4-3)。

若 A ， B ， C_1 ， C_2 ，和 T 的定义如式(4-14)， $\phi(t)$ 的定义满足式(4-11)，且 $\phi_i(t, s) = x(t + s\tau_i)$ ， $\hat{\phi}(t)$ 的定义满足式(4-13)，且 $\hat{\phi}_i(t, s) = \hat{x}(t + s\tau_i)$ ，由引理 4-2 得针对系统(4-2)的研究成果适用于系统(4-1)。此时，若 $z(t)$ 为系统(4-1)的解， $\hat{z}(t)$ 为观测系统(4-12)的解，则 $\|z_e\|_{L_2} \leq \gamma \|w\|_{L_2}$ 。同样地，若 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ 成立，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}_f(t) - x_f(t)) = 0$ ，其中 $x(t)$ 为系统(4-1)的解， $\hat{x}(t)$ 为观测系统(4-12)的解，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$ 。证毕。

注 4-6 定理 4-3 是基于完全型 L-K 泛函方法给出的，其待定参数是关于 s 的矩阵函数，因此相比直接构建型泛函可以直接实现寻优，理论上，通过增加 s 的最高阶数，可以使得所得到的结果保守性趋近于 0，这一点将在以下数值仿真中得到证实。与文献[30]相比，本章采用的状态观测器同样可以修正对当前、历史的状态函数的观测值，而且观测器形式结构更为简化。这种结构上的简化使得本章的结果适用于实际工程系统中含传感器噪声的情况，更具有实际应用价值。

4.5 数值仿真

例 4-1 考虑如下连续线性时滞系统，

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t-0.3) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t), \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t), \\ y(t) &= [0 \quad 10]x(t) + [0 \quad 2]w(t).\end{aligned}$$

针对该系统，构建状态观测系统(4-12)，若定义 $z_e(t) = \hat{z}(t) - z(t)$ ，其中 $z(t)$ 和 $\hat{z}(t)$ 分别为系统(4-1)和观测系统(4-12)的解，则设计目标为 $z_e(t)$ 满足 $\|z_e\|_{L_2} \leq \gamma_{\min} \|w\|_{L_2}$ ，最小化外部输入干扰对于调节输出观测误差的影响。

首先，由于现有文献中几乎没有对线性多时滞系统的 H_∞ 观测进行研究的，为了比较，我们给出一个可以媲美理论分析值的 H_∞ 范数界。我们应用 MATLAB 的 Padé 时滞工具，将此连续时滞系统用 10 阶的 Padé 时滞模型逼近，利用对 ODE 系统的 H_∞ 观测器设计判据(如定理 4-1，其中 \mathcal{A} ， \mathcal{B} ， \mathcal{C}_1 ， \mathcal{C}_2 ， \mathcal{D}_2 ， \mathcal{T} 是由 Padé 时滞工具求得的 Padé 时滞逼近模型的常数矩阵， \mathcal{P} 和 \mathcal{Z} 为所要求解的常数矩阵)，可得观测误差系统满足的 H_∞ 范数界值 $\gamma_{\text{padé}}=1.1910$ 。由于所得 Padé 时滞模型可以较为精确地拟合该时滞系统的运行情况，因此基于此 Padé 时滞模型所求得的 H_∞ 范数界值的保守性极小。

其次，应用本章定理 4-3，通过 MATLAB 中的 PIE 工具箱进行求解，得 $\gamma_{\min}=1.191$ ，与应用 MATLAB 的 Padé 时滞工具相比，可以精确到其小数点后四位。这验证了我们的结果具有较小的保守性。

最后，为验证所得结果的有效性，我们给出了相应的仿真曲线。定义观测误差 $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ ，其中， $x(t)$ 为系统(4-1)的状态， $\hat{x}(t)$ 为观测系统(4-12)的状态。当传感器噪声为阶跃函数时，图 4-1 给出了传感器噪声的变化曲线，图 4-2 给出了该系统在状态观测系统(4-12)(取 $\gamma_{\min} = 1.191$ 时观测器增益)作用下的观测误差轨迹及该被观测系统的状态轨迹曲线，求得此时，

$$\gamma_{\text{real}} = \frac{\|z_{e(\text{real})}\|_{L_2}}{\|w_{(\text{real})}\|_{L_2}} = 0.9505。$$

由图 4-2 知，该被观测系统为发散系统。即使如此，我们的观测器在阶跃干扰满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ 时，有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ ，观测误差趋于 0，验证了所设计观测器的有效性。

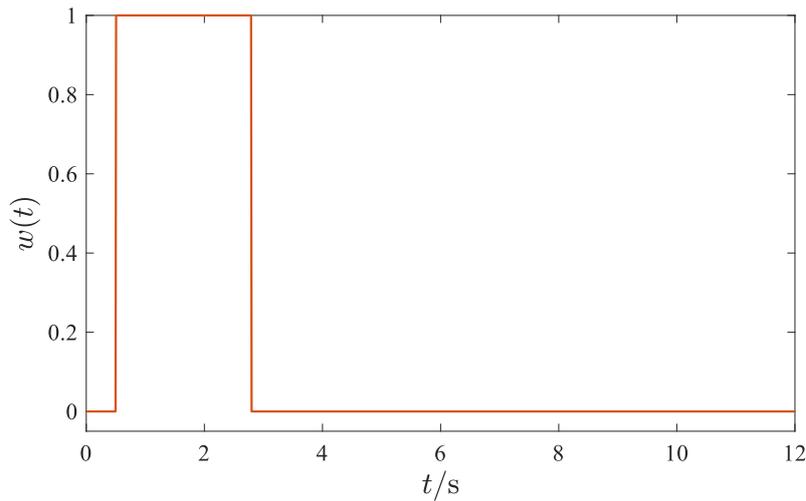


图 4-1 传感器噪声

Fig. 4-1 Step disturbance

例 4-2 考虑如下连续线性时滞系统，

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} x(t-0.3) + \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix} x(t-0.5) \\ & + \begin{bmatrix} -0.4545 & 0 \\ 0 & 0.9090 \end{bmatrix} w(t), \end{aligned}$$

$$z(t) = [0 \quad 100] x(t),$$

$$y(t) = [0 \quad 100] x(t) + [0 \quad 10] x(t-0.3) + [0 \quad 2] x(t-0.5) + [1 \quad 1] w(t)。$$

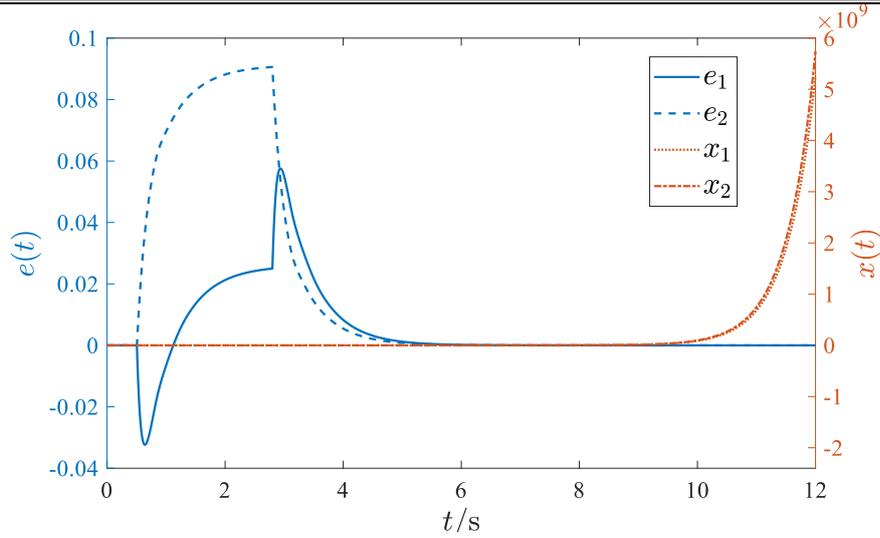


图 4-2 状态观测误差及被观测系统状态轨迹

Fig. 4-2 Errors of state estimation and state dynamics of the plant system

同例 4-1，针对该系统，我们构建观测系统(4-12)。定义 $z_e(t) = \hat{z}(t) - z(t)$ ，设计目标为最小化外部干扰对观测误差的影响，即 $z_e(t)$ 满足 $\|z_e\|_{L_2} \leq \gamma_{\min} \|w\|_{L_2}$ 。

首先我们应用 MATLAB 的 Padé 工具，求得观测误差系统满足 H_∞ 范数界值 $\gamma_{\text{pade}}=0.9592$ 。其次，应用定理 4-3，利用我们构建的状态观测器系统(4-12)，通过 MATLAB 中的 PIE 工具箱求解得 $\gamma_{\min}=0.9592$ ，同样精确到了用 Padé 方法所得的小数点后四位。

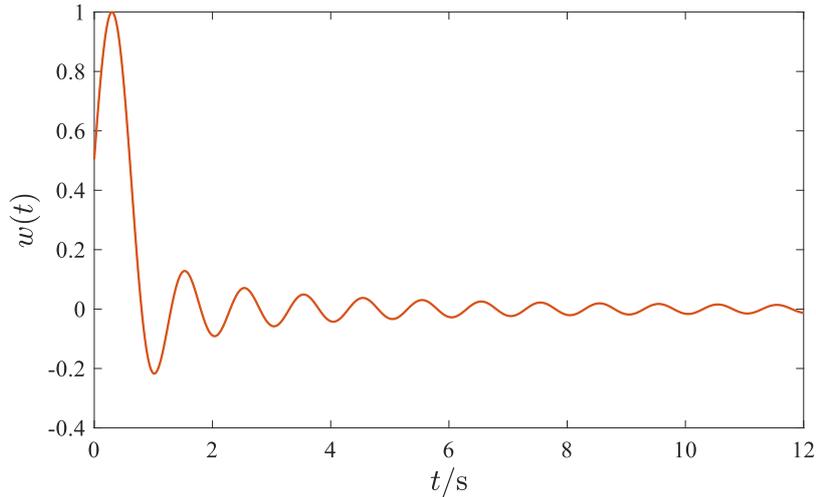


图 4-3 传感器噪声

Fig. 4-3 Sinc disturbance

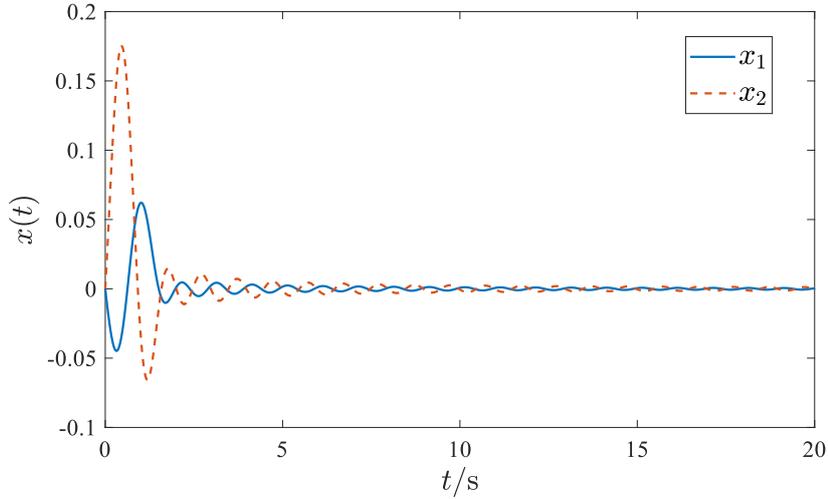


图 4-4 被观测系统状态轨迹

Fig. 4-4 State dynamics of the plant system

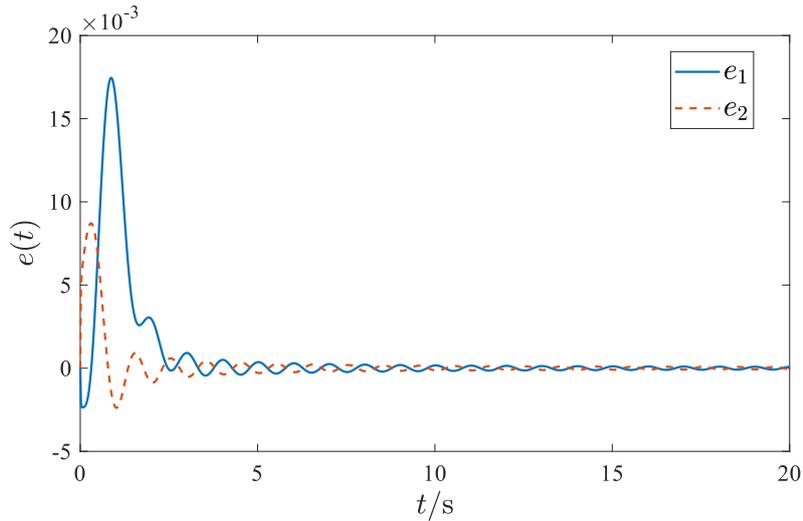


图 4-5 状态观测误差

Fig. 4-5 Errors of state estimation

最后，我们给出了相应的仿真曲线。图 4-3 给出了传感器噪声曲线。当传感器噪声为 sinc 函数时，该被观测系统是稳定的，其状态曲线由图 4-4 给出。定义观测误差 $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ 。图 4-5 给出了该系统在状态观测系统(4-12)(取 $\gamma_{\min} = 0.9592$ 时观测器增益)作用下的观测误差轨迹，并求得 $\gamma_{\text{real}} = 0.5792$ ，在此传感器噪声作用下，观测误差趋于 0，验证了 H_{∞} 观测器的有效性。

例 4-3 为测试所提方法的计算复杂度，考虑如下含有 K 个时滞的 n 维线性系统，

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^K \frac{x(t-i/K)}{K} + \mathbf{1}w(t),$$

$$z(t) = y(t) = \mathbf{1}^T x(t) + \mathbf{1}^T w(t).$$

其中 $w(t) \in \mathbb{R}$, $z(t) \in \mathbb{R}$, 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 。计算复杂度可以近似为 K 和 n 的乘积的函数。表 4-6 给出了应用定理 4-3, Intel i7-5960X 处理器在 Sedumi 过程的 CPU 计算时间。当 $K=6$, $n=6$ 时, 由于计算机内存的限制, 已不可求解。

表 4-6 CPU 计算时间/s

Table 4-6 The computation time as CPU sec

K	n				
	1	2	3	4	6
1	0.3610	0.4360	0.8488	1.887	16.50
2	0.4380	1.573	11.94	77.94	950.8
3	0.9000	10.14	167.0	913.9	9827
4	1.731	82.92	912.6	4263	24030
6	12.10	967.2	9650	23980	N/A

注 4-7 据作者所知, 若基于 LMI 方法和传统的直接构建型 L-K 泛函方法研究该线性多时滞系统, 那么随着时滞个数的增加, 计算以及分析复杂度将大幅度增加, 是无法处理系统时滞个数较多的情况的。这体现了 LOI 方法的优越性。

例 4-4 考虑淋浴系统^[4]如下,

$$\dot{r}_i(t) = T_i(t) - w_i(t),$$

$$\dot{T}_i(t) = -\alpha_i(T_i(t-\tau_i) - w_i(t)) + \sum_{j=1, j \neq i} \alpha_{ij}(T_j(t-\tau_j) - w_j(t)),$$

$$y_i(t) = z_i(t) = r_i(t),$$

该案例参考了文献[4]中给出的淋浴系统方程。其中, T_i 为第 i 人淋浴出水的温度, w_i 为第 i 人所期望的淋浴出水的温度, $r_i(t)$ 为第 i 人淋浴出水温度与所期望出水温度的差值, τ_i 为第 i 人处水从调节阀到淋浴出水口所经历的时滞, $i \in [1, n]$, 其中, n 为同时进行淋浴的人数。

假设 $n=2$, 即有 2 个人同时淋浴, $\alpha_i=1$, $\alpha_{ij}=0.5$, $\tau_1=1$, $\tau_2=2$, 令 $x = [r_1^T, r_2^T, T_1^T, T_2^T]^T$, 则有

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + A_2 x(t-2) + Bw(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

$$z(t) = Cx(t).$$

其中 $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$

和 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。应用定理 4-3, 构建的状态观测器系统(4-12)。同样地, 当传感

器噪声为 sinc 函数时, 定义观测误差 $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ 。图 4-7 给出了该系统在状态观测系统(4-12)作用下的观测误差轨迹, 在该传感器噪声作用下, 状态观测误差趋于 0, 验证了 H_∞ 观测器的有效性。

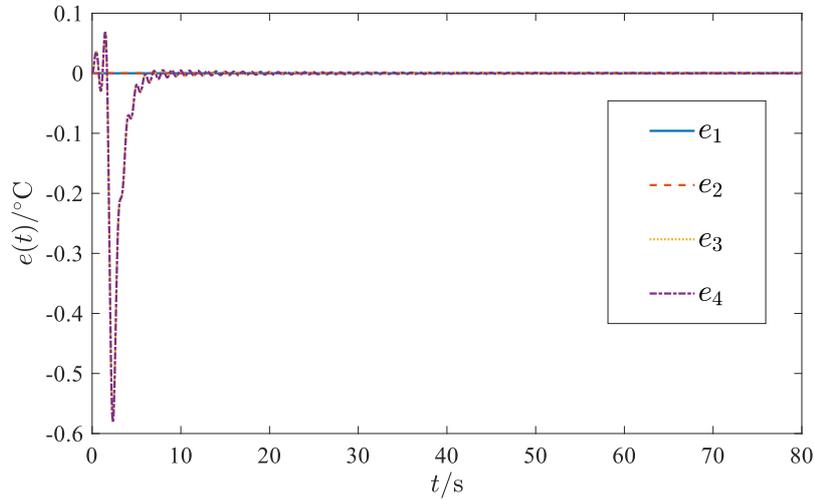


图 4-7 状态观测误差曲线

Fig. 4-7 Errors of state estimation

4.6 本章小结

本章研究了考虑传感器噪声的线性多时滞系统的 H_∞ 观测器设计问题。所设计的观测器可以同时修正对系统当前、历史状态的观测值。构建了 PI 算子内积形式的完全型 L-K 泛函, 提出了满足 H_∞ 鲁棒性能指标下的 LOI 形式的状态观测器设计方法, 给出了相应的观测器增益算子的求解方法。所得结果可以通过 PIE 算子工具箱直接求解。数值算例显示所得 H_∞ 增益十分接近于用 Padé 方法所得到的理论分析界值, 最高精确度可达到其小数点后四位。

第5章 离散线性时滞系统的时滞相关稳定性分析

本章研究了一类离散线性时滞系统的时滞相关稳定性问题，提出了一种新型求和不等式，引入了二重求和项。该不等式放松了 Wirtinger 求和不等式。通过构造合适的 L-K 泛函，结合新型求和不等式，推导出基于 LMI 的离散线性时滞系统的时滞相关稳定判据。通过数值算例说明了该方法的有效性和优越性。

5.1 引言

随着计算机技术的飞速发展，以及人们对工业生产的要求的不断提高，现在的实际系统大多是计算机控制系统，表现为离散时间系统或者不完全的连续时间系统。虽然连续系统理论与离散系统理论在某些方面是相通的，但由于离散系统中存在离散信号，以及其本身的结构特点，在很多时候都难以利用传统的连续系统理论分析和研究，因此对于离散系的分析和研究具有非常重要的理论与实际应用价值^[98-100]。

由于信号传输需要时间，在计算机控制的实际工程系统中时滞现象是不可避免的，因此对于离散时滞系统稳定性的研究得到了极大关注。直接构建型 L-K 泛函方法是常用的一种方法^[101,102]，而完全型 L-K 泛函目前还没有应用到离散系统的分析和研究中，这也是作者下一步的研究方向。针对直接构建型泛函导数的求取，目前应用最多的是求和不等式技术，包括 Jensen 求和不等式^[82]、基于自由矩阵的求和不等式^[103]和 Bessel-Legendre 求和不等式^[2]。文献[103]提出了基于自由矩阵的和不等式，改进了 Wirtinger 求和不等式，放宽了离散时滞系统稳定所允许的时滞区间。对比连续时滞系统的研究进程来看，离散时滞系统的研究进程是类似的，且稍有滞后，这是因为对于离散时滞系统的研究在很大方面来说是基于连续时滞系统的研究进行的。文献[83]提出了新的积分不等式，改进了 Wirtinger 积分不等式，但还没有相应的求和不等式应用到离散时间系统中，这为离散时滞系统的研究提供了改进的空间。

同时，在实际工程系统中，系统的稳定性总是不可避免的受到外部环境因素(例如不确定性、慢时变参数等等)的影响，而这些因素通常被看作非线性干扰，系统的

稳定性不可避免的将会受到影响，而这些系统不确定因素通常被看作系统非线性扰动，所以对考虑非线性干扰的离散变时滞系统的鲁棒稳定性研究具有重要意义。

5.2 离散线性时滞系统模型及相关引理

离散时间线性时滞系统数学模型的一般形式为：

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d_k), \forall k \geq 0, \\ x(k) = \phi(k), \quad \forall k \in [-d_M, 0], \end{cases} \quad (5-1)$$

其中，系统状态向量 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ， $\phi(k)$ 为区间 $[-d_M, 0]$ 上的系统初始状态函数， A_d 为适当维数的系统参数矩阵， $d_k > 0$ 是时变时滞，满足 $d_m \leq d_k \leq d_M$ ，其中 d_m, d_M 是正常数，定义 $d_{Mm} = d_M - d_m$ 。为简化计算，定义

$$\begin{aligned} \omega_0 &= [x^T(a+n), x^T(a), \frac{1}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n} x^T(i)]^T, \\ \omega &= [\omega_0, \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=a}^{a+n} \sum_{j=i}^{a+n} x^T(j)]^T, \\ \Pi_1 &= e_1 - e_2, \\ \Pi_2 &= -e_1 - e_2 + 2e_3, \\ \Pi_3 &= e_1 - e_2 + 6e_3 - 6e_4. \end{aligned}$$

在给出本章结果之前，首先给出以下引理。

引理 5-1^[79] 对于任意给定的正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，整数 $a, n > 0$ 以及向量函数 $x(i): [a, a+n-1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，定义 $y(i) = x(i+1) - x(i)$ ，有如下不等式成立，

$$-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i) R y(i) \leq -\frac{1}{n} \omega_0^T \begin{bmatrix} 4R & 2R & -6R \\ * & 4R & -6R \\ * & * & 12R \end{bmatrix} \omega_0. \quad (5-2)$$

引理 5-2 (Schur 补引理^[81]) 对于任意给定的正定对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$ ，其中，

$S_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ， $S_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ，以下三个条件等价：

- i) $S < 0$;
- ii) $S_{11} < 0$ ， $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;

iii) $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T < 0$ 。

5.3 主要结果

首先, 针对 Wirtinger 求和不等式的保守性问题, 我们提出了保守性较小的新型求和不等式, 然后针对系统(5-1), 通过构造直接构建型 L-K 泛函, 结合新型求和不等式, 得到了 LMI 形式的时滞相关稳定性判据。

5.3.1 新型求和不等式

本小节提出了新型求和不等式, 由定理 5-1 给出。

定理 5-1 对于任意给定的正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 任意矩阵 $\bar{N}_1 \in \mathbb{R}^{4n \times n}$, $\bar{N}_2 \in \mathbb{R}^{4n \times n}$ 和 $\bar{N}_3 \in \mathbb{R}^{4n \times n}$, 对任意的整数 a , 整数 $n > 0$, 连续向量函数 $x(i): [a, a+n-1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定义 $y(i) = x(i+1) - x(i)$, 则下式成立,

$$-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i) R y(i) \leq \omega^T \Omega_0 \omega, \quad (5-3)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Omega_0 = & n(\bar{N}_1 R^{-1} \bar{N}_1^T + \frac{n-1}{3(n+1)} \bar{N}_2 R^{-1} \bar{N}_2^T + \frac{(n-1)(n-2)}{5(n+1)(n+2)} \bar{N}_3 R^{-1} \bar{N}_3^T) \\ & + \text{sym} \{ \bar{N}_1 \Pi_1 + \bar{N}_2 \Pi_2 + \bar{N}_3 \Pi_3 \}. \end{aligned}$$

证明 首先, 我们给出证明过程所需要的变量定义以及事实条件。由 $y(i) = x(i+1) - x(i)$, 可知以下事实,

$$\begin{aligned} \sum_{i=a}^{a+n-1} y(i) &= x(a+n) - x(a), \\ \sum_{i=a}^{a+n-1} \sum_{j=i}^{a+n-1} y(j) &= \sum_{i=a}^{a+n-1} (i-a+1)y(i), \\ \sum_{i=a}^{a+n-1} \sum_{j=i}^{a+n-1} \sum_{k=i}^{a+n-1} y(k) &= \frac{1}{2} \sum_{i=a}^{a+n-1} (i^2 + (3-2a)i + a^2 - 3a + 2)y(i). \end{aligned} \quad (5-4)$$

然后, 定义

$$\begin{aligned} \zeta(i) &= \left[\omega^T, f_1(i)\omega^T, f_2(i)\omega^T \right]^T, \\ f_1(i) &= \frac{2}{n+1} \left(-i + a - 1 + \frac{n+1}{2} \right), \\ f_2(i) &= \frac{6}{(n+1)(n+2)} \left(i^2 - (2a+n-1)i + a^2 + an - a + \frac{n^2 - 3n + 2}{6} \right), \end{aligned} \quad (5-5)$$

由式(5-5)可得,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=a}^{a+n-1} f_1(i) &= 0, & \sum_{i=a}^{a+n-1} f_2(i) &= 0, \\
 \sum_{i=a}^{a+n-1} f_1(i)f_2(i) &= 0, & \sum_{i=a}^{a+n-1} f_1^2(i) &= \frac{n(n-1)}{3(n+1)}, \\
 \sum_{i=a}^{a+n-1} f_2^2(i) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{5(n+1)(n+2)}.
 \end{aligned} \tag{5-6}$$

利用式(5-4), (5-5)和(5-6), 可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=a}^{a+n-1} f_1(i)y(i) &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n-1} \left(-i+a-1+\frac{n+1}{2}\right)y(i) \\
 &= -\frac{2}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n-1} \sum_{j=i}^{a+n-1} y(j) + \sum_{i=a}^{a+n-1} y(i) \\
 &= x(a+n) - x(a) - \frac{2}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n-1} (x(a+n) - x(i)) \\
 &= x(a+n) - x(a) - \frac{2n}{n+1} x(a+n) + \frac{2}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n-1} x(i) \\
 &= x(a+n) - x(a) - \frac{2n+2}{n+1} x(a+n) + \frac{2}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n} x(i) \\
 &= -x(a+n) - x(a) + \frac{2}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n} x(i).
 \end{aligned} \tag{5-7}$$

对 $f_2(i)$ 作简单的数学变换, 得

$$f_2(i) = 1 - \frac{6}{n+1}(i-a+1) + \frac{6}{(n+1)(n+2)}(i^2 + (3-2a)i + a^2 - 3a + 2),$$

同时, 利用式(5-6), 以及(5-7), 得

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=a}^{a+n-1} f_2(i)y(i) &= \sum_{i=a}^{a+n-1} y(i) - \frac{6}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n-1} \sum_{j=i}^{a+n-1} y(j) + \frac{12}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=a}^{a+n-1} \sum_{j=i}^{a+n-1} \sum_{k=j}^{a+n-1} y(k) \\
 &= x(a+n) - x(a) - \frac{6}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n-1} (x(a+n) - x(i)) \\
 &\quad + \frac{12}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=a}^{a+n-1} \sum_{j=i}^{a+n-1} (x(a+n) - x(j)) \\
 &= x(a+n) - x(a) - \frac{6}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n-1} (x(a+n) - x(i)) \\
 &\quad + \frac{12}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=a}^{a+n-1} \sum_{j=i}^{a+n-1} (x(a+n) - x(j))
 \end{aligned} \tag{5-8}$$

$$\begin{aligned}
 &= x(a+n) - x(a) - \frac{6n}{n+1}x(a+n) + \frac{6}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n-1} x(i) + \frac{6n}{n+2}x(a+n) \\
 &\quad - \frac{12}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=a}^{a+n-1} \sum_{j=i}^{a+n-1} x(j) \\
 &= \Pi_3 \omega.
 \end{aligned}$$

然后, 我们将给出具体的证明过程。易得,

$$-2\zeta^T(i)Ny(i) \leq \zeta^T(i)NR^{-1}N^T\zeta(i) + y^T(i)Ry(i), \quad (5-9)$$

其中, 定义 $N = [\bar{N}_1^T, \bar{N}_2^T, \bar{N}_3^T]^T$ 。将式(5-9)的左右两边同时从 a 到 $(a+n-1)$ 求和, 将

第一步中所得的式(5-4), (5-5), (5-6), (5-7), (5-8), 和(5-9)代入, 可得

$$\begin{aligned}
 -\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i) &\leq \sum_{i=a}^{a+n-1} \zeta^T(i)\bar{N}R^{-1}\bar{N}^T\zeta(i) + \sum_{i=a}^{a+n-1} 2\zeta^T(i)\bar{N}y(i) \\
 &= n(\omega^T\bar{N}_1R^{-1}\bar{N}_1^T\omega + \frac{n-1}{3(n+1)}\omega^T\bar{N}_2R^{-1}\bar{N}_2^T\omega \\
 &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{5(n+1)(n+2)}\omega^T\bar{N}_3R^{-1}\bar{N}_3^T\omega) \\
 &\quad + 2\omega^T\bar{N}_1(e_1 - e_2)\omega - 2\omega^T\bar{N}_2(e_1 + e_2 - 2e_3)\omega \\
 &\quad + 2\omega^T\bar{N}_3(e_1 - e_2 + 6e_3 - 6e_4)\omega \\
 &= \omega^T\Omega_0\omega,
 \end{aligned} \quad (5-10)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Omega_0 &= n(\bar{N}_1R^{-1}\bar{N}_1^T + \frac{n-1}{3(n+1)}\bar{N}_2R^{-1}\bar{N}_2^T + \frac{(n-1)(n-2)}{5(n+1)(n+2)}\bar{N}_3R^{-1}\bar{N}_3^T) \\
 &\quad + \text{sym}\{\bar{N}_1\Pi_1 + \bar{N}_2\Pi_2 + \bar{N}_3\Pi_3\},
 \end{aligned}$$

即 $-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i) \leq \omega^T\Omega_0\omega$ 成立。证毕。

引理 5-3 对于任意给定的正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 任意矩阵 $\bar{N}_1 \in \mathbb{R}^{4n \times n}$, $\bar{N}_2 \in \mathbb{R}^{4n \times n}$ 和 $\bar{N}_3 \in \mathbb{R}^{4n \times n}$, 整数 a , $n > 0$, 以及向量函数 $x(i): [a, a+n-1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定义 $y(i) = x(i+1) - x(i)$, 有如下不等式成立,

$$-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i) \leq \omega^T\Omega_1\omega, \quad (5-11)$$

其中,

$$\Omega_1 = n(\bar{N}_1R^{-1}\bar{N}_1^T + \frac{1}{3}\bar{N}_2R^{-1}\bar{N}_2^T + \frac{1}{5}\bar{N}_3R^{-1}\bar{N}_3^T) + \text{sym}\{\bar{N}_1\Pi_1 + \bar{N}_2\Pi_2 + \bar{N}_3\Pi_3\}.$$

证明 由定理 5-1, 可知式(5-3)成立。将式(5-3)与(5-11)联立, 得

$$-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i) \leq \omega^T \Omega_0 \omega,$$

$$-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i) \leq \omega^T \Omega_1 \omega.$$

二者对于同一个求和式 $-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i)$ 的放缩差值为 $\omega^T \Delta \Omega \omega$, 其中,

$$\begin{aligned} \Delta \Omega &= \Omega_1 - \Omega_0 \\ &= \frac{2n}{3(n+1)} \bar{N}_2 R^{-1} \bar{N}_2^T + \frac{6n^2}{5(n+1)(n+2)} \bar{N}_3 R^{-1} \bar{N}_3^T. \end{aligned}$$

由于 $R > 0$, 易知 $\Delta \Omega > 0$, 即 $-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i) \leq \omega^T \Omega_0 \omega \leq \omega^T \Omega_1 \omega$ 成立。于是有以下

结论:

若定理 5-1 成立, 即

$$-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i) \leq \omega^T \Omega_0 \omega$$

成立, 则有

$$-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i)Ry(i) \leq \omega^T \Omega_1 \omega$$

成立, 即引理 5-3 成立。证毕。

注 5-1 显然, 引理 5-3 是定理 5-1 的简化版本, 比定理 5-1 更保守一些, 但胜在形式简单, 易于使用和计算。若是考虑离散定时滞系统的稳定性, 二者均可以使用, 但借助定理 5-1 得到的结果保守性更小一些; 若是考虑离散区间时滞或者变时滞系统, 则只有引理 5-3 适用, 因为它关于 n 是仿射的, 而定理 5-1 的分母含有 n^2 项, 既不关于 n 仿射, 也不能应用互凸不等式进行放缩。这也是我们给出引理 5-3 的原因。

注 5-2 当 $\bar{N}_1 = \frac{1}{n}[-R, R, 0, 0]^T$, $\bar{N}_2 = \frac{3}{n}[R, R, -2R, 0]^T$ 以及 $\bar{N}_3 = 0$ 时, 经计算可得引理 5-3 退化成了引理 5-1, 证明了相比引理 5-1, 引理 5-3 的保守性可能更小。同时, 引理 5-1 不是关于 n 仿射的, 必须应用互凸不等式才可以进行变时滞系统的研究, 这会引入新的保守性。

5.3.2 时滞相关稳定性判据

本小节针对系统(5-1)，基于直接构建型 L-K 泛函和不等式放缩方法，给出了 LMI 形式的时滞相关稳定性判据。

定理 5-2 给定常值 d_m, d_M ，满足 $0 \leq d_m \leq d_M$ ，若存在对称矩阵对称正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{6n \times 6n}$ ， $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，任意矩阵 $N_i \in \mathbb{R}^{4n \times n}, i=1,2,\dots,9$ 满足下式

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ * & \Phi_3 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5-12)$$

其中，

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & G_1^T P G_1 - G_0^T P G_0 + e_1^T Q_1 e_1 - e_2^T Q_1 e_2 + e_2^T Q_2 e_2 - e_4^T Q_2 e_4 \\ & + d_m (e_0 - e_1)^T R_1 (e_0 - e_1) + d_M (e_0 - e_1)^T R_2 (e_0 - e_1) \\ & + m_1^T \text{sym}\{N_1 \Pi_1 + N_2 \Pi_2 + N_3 \Pi_3\} m_1 + m_2^T \text{sym}\{N_4 \Pi_1 + N_5 \Pi_2 + N_6 \Pi_3\} m_2 \\ & + m_3^T \text{sym}\{N_7 \Pi_1 + N_8 \Pi_2 + N_9 \Pi_3\} m_3, \end{aligned}$$

$$\Phi_{12} = \text{sym}\{(G_1 - G_0)^T P G(d_k)\},$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \left[m_1^T d_m N_1, \quad m_1^T d_m N_2, \quad m_1^T d_m N_3, \quad m_2^T (d_M - d_k) N_4, \quad m_2^T (d_M - d_k) N_5, \right. \\ & \left. m_2^T (d_M - d_k) N_6, \quad m_3^T (d_k - d_m) N_7, \quad m_3^T (d_k - d_m) N_8, \quad m_3^T (d_k - d_m) N_9 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \text{diag}\{-d_m R_1, \quad -3d_m R_1, \quad -5d_m R_1, \quad -(d_M - d_k) R_2, \quad -3(d_M - d_k) R_2, \\ & -5(d_M - d_k) R_2, \quad -(d_k - d_m) R_2, \quad -3(d_k - d_m) R_2, \quad -5(d_k - d_m) R_2\}, \end{aligned}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} e_0^T, & (d_m + 1)e_5^T - e_2^T, & -e_3^T - e_4^T, & \frac{1}{2}(d_m + 1)(d_m + 2)e_8^T - (d_m + 1)e_3^T \end{bmatrix}^T,$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} e_1^T, & (d_m + 1)e_5^T - e_1^T, & -e_2^T - e_3^T, & \frac{1}{2}(d_m + 1)(d_m + 2)e_8^T - (d_m + 1)e_1^T \end{bmatrix}^T,$$

$$G(d_k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_4^T & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$m_1 = \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & e_5^T & e_8^T \end{bmatrix}^T,$$

$$m_2 = \begin{bmatrix} e_3^T & e_4^T & e_7^T & e_{10}^T \end{bmatrix}^T,$$

$$m_3 = \begin{bmatrix} e_2^T & e_3^T & e_6^T & e_9^T \end{bmatrix}^T,$$

$$m_4 = (d_M - d_k + 1)e_7 + (d_k - d_m + 1)e_6,$$

$$e_0 = A e_1 + A_d e_3.$$

则系统(5-1)满足渐近稳定。

证明 首先, 定义

$$\begin{aligned}
 y(k) &= x(k+1) - x(k), \\
 \eta(k) &= \begin{bmatrix} x^T(k) & \sum_{i=k-d_m}^{k-1} x^T(i) & \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} x^T(i) & \sum_{i=k-d_m}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} x^T(j) \end{bmatrix}^T, \\
 \xi(k) &= \begin{bmatrix} x^T(k) & x^T(k-d_m) & x^T(k-d_k) & x^T(k-d_M) & \frac{1}{d_m+1} \sum_{i=k-d_m}^k x^T(i) \\ \frac{1}{d_k-d_m+1} \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m} x^T(i) & \frac{1}{d_M-d_k+1} \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k} x^T(i) & v_1^T(k) & v_2^T(k) & v_3^T(k) \end{bmatrix}^T,
 \end{aligned} \tag{5-13}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 v_1(k) &= \frac{2}{(d_m+1)(d_m+2)} \sum_{i=k-d_m}^k \sum_{j=i}^k x(j), \\
 v_2(k) &= \frac{2}{(d_k-d_m+1)(d_k-d_m+2)} \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m} \sum_{j=i}^{k-d_m} x(j), \\
 v_3(k) &= \frac{2}{(d_M-d_k+1)(d_M-d_k+2)} \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k} \sum_{j=i}^{k-d_k} x(j).
 \end{aligned}$$

针对系统(5-1), 选取直接构建型 L-K 泛函如下,

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k), \tag{5-14}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 V_1(k) &= \eta^T(k) P \eta(k), \\
 V_2(k) &= \sum_{i=k-d_m}^{k-1} x^T(i) Q_1 x(i) + \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} x^T(i) Q_2 x(i), \\
 V_3(k) &= \sum_{i=-d_m}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j) R_1 y(j), \\
 V_4(k) &= \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j) R_2 y(j).
 \end{aligned}$$

由定义(5-13), 得

$$\begin{aligned}
 y(k) &= x(k+1) - x(k) = (e_0 - e_1) \xi(k), \\
 \eta(k) &= (G_0 + G(d_k)) \xi(k), \\
 \eta(k+1) &= \begin{bmatrix} x^T(k+1) & \sum_{i=k-d_m+1}^k x^T(i) & \sum_{i=k-d_M+1}^{k-d_m} x^T(i) & \sum_{i=k-d_m+1}^k \sum_{j=i}^k x^T(j) \end{bmatrix}^T \\
 &= (G_1 + G(d_k)) \xi(k).
 \end{aligned} \tag{5-15}$$

已知式(5-13)和(5-15), 沿系统(5-1)的轨迹, 计算 V_1 的前向差分得,

$$\begin{aligned}
 \Delta V_1(k) &= V_1(k+1) - V_1(k) \\
 &= \eta^T(k+1)P\eta(k+1) - \eta^T(k)P\eta(k) \\
 &= \xi^T(k)((G_1 + G(d_k))^T P(G_1 + G(d_k)) - (G_0 + G(d_k))^T P(G_0 + G(d_k)))\xi(k) \\
 &= \xi^T(k)(G_1^T P G_1 - G_0^T P G_0 + \text{sym}\{(G_1 - G_0)^T P G(d(k))\})\xi(k).
 \end{aligned} \tag{5-16}$$

计算 V_2 的前向差分得,

$$\begin{aligned}
 \Delta V_2(k) &= V_2(k+1) - V_2(k) \\
 &= x^T(k)Q_1x(k) - x^T(k-d_m)Q_1x(k-d_m) \\
 &\quad + x^T(k-d_m)Q_2x(k-d_m) - x^T(k-d_M)Q_2x(k-d_M) \\
 &= \xi^T(k)(e_1^T Q_1 e_1 - e_2^T Q_1 e_2 + e_2^T Q_2 e_2 - e_4^T Q_2 e_4)\xi(k).
 \end{aligned} \tag{5-17}$$

计算 V_3 的前向差分得,

$$\begin{aligned}
 \Delta V_3(k) &= V_3(k+1) - V_3(k) \\
 &= \sum_{i=-d_m}^{-1} \sum_{j=k+i+1}^k y^T(j)R_1y(j) - \sum_{i=-d_m}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)R_1y(j) \\
 &= \sum_{i=-d_m}^{-1} (y^T(k)R_1y(k) - y(k+i)R_1y(k+i)) \\
 &= d_m y^T(k)R_1y(k) - \sum_{i=k-d_m}^{k-1} y^T(i)R_1y(i) \\
 &= \xi^T(k)d_m(e_0 - e_1)^T R_1(e_0 - e_1)\xi(k) - \sum_{i=k-d_m}^{k-1} y^T(i)R_1y(i).
 \end{aligned} \tag{5-18}$$

计算 V_4 的前向差分得,

$$\begin{aligned}
 \Delta V_4(k) &= V_4(k+1) - V_4(k) \\
 &= \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{j=k+i+1}^k y^T(j)R_2y(j) - \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)R_2y(j) \\
 &= \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} (y^T(k)R_2y(k) - y(k+i)R_2y(k+i)) \\
 &= d_{Mm} y^T(k)R_2y(k) - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} y^T(i)R_2y(i) \\
 &= \xi^T(k)d_{Mm}(e_0 - e_1)^T R_2(e_0 - e_1)\xi(k) - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} y^T(i)R_2y(i).
 \end{aligned} \tag{5-19}$$

对 $\Delta V_3(k)$, $\Delta V_4(k)$ 中的求和表达式 $-\sum_{i=k-d_m}^{k-1} y^T(i)R_1y(i)$ 和 $-\sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} y^T(i)R_2y(i)$, 应用

引理 5-3, 得

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=k-d_m}^{k-1} y^T(i) R_1 y(i) \leq \xi^T(k) m_1^T \Omega_1 m_1 \xi(k), \\
 & - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} y^T(i) R_2 y(i) = - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} y^T(i) R_2 y(i) - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} y^T(i) R_2 y(i) \\
 & \leq \xi^T(k) (m_2^T \Omega_2 m_2 + m_3^T \Omega_3 m_3) \xi(k),
 \end{aligned} \tag{5-20}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= \text{sym} \{ N_1 \Pi_1 + N_2 \Pi_2 + N_3 \Pi_3 \} \\
 & \quad + d_m (N_1 R_1^{-1} N_1^T + \frac{1}{3} N_2 R_1^{-1} N_2^T + \frac{1}{5} N_3 R_1^{-1} N_3^T), \\
 \Omega_2 &= \text{sym} \{ N_4 \Pi_1 + N_5 \Pi_2 + N_6 \Pi_3 \} \\
 & \quad + (d_M - d_k) (N_4 R_2^{-1} N_4^T + \frac{1}{3} N_5 R_2^{-1} N_5^T + \frac{1}{5} N_6 R_2^{-1} N_6^T), \\
 \Omega_3 &= \text{sym} \{ N_7 \Pi_1 + N_8 \Pi_2 + N_9 \Pi_3 \} \\
 & \quad + (d_k - d_m) (N_7 R_2^{-1} N_7^T + \frac{1}{3} N_8 R_2^{-1} N_8^T + \frac{1}{5} N_9 R_2^{-1} N_9^T).
 \end{aligned}$$

联立式(5-18), 式(5-19)和式(5-20), 得

$$\begin{aligned}
 \Delta V_3(k) &\leq \xi^T(k) (d_m (e_0 - e_1)^T R_1 (e_0 - e_1) + m_1^T \Omega_1 m_1) \xi(k), \\
 \Delta V_4(k) &\leq \xi^T(k) (d_{Mm} (e_0 - e_1)^T R_2 (e_0 - e_1) + m_2^T \Omega_2 m_2 + m_3^T \Omega_3 m_3) \xi(k).
 \end{aligned} \tag{5-21}$$

综合式(5-16), 式(5-17), 和式(5-21), 得到 V 的前向差分如下

$$\begin{aligned}
 \Delta V(k) &= \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) + \Delta V_4(k) \\
 &\leq \xi^T(k) (\Phi_0 + \Phi_4(d_k)) \xi(k),
 \end{aligned} \tag{5-22}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= \Phi_{11} + d_m m_1^T (N_1 R_1^{-1} N_1^T + \frac{1}{3} N_2 R_1^{-1} N_2^T + \frac{1}{5} N_3 R_1^{-1} N_3^T) m_1, \\
 \Phi_4(d_k) &= \Phi_{12} + (d_M - d_k) m_2^T (N_4 R_2^{-1} N_4^T + \frac{1}{3} N_5 R_2^{-1} N_5^T + \frac{1}{5} N_6 R_2^{-1} N_6^T) m_2 \\
 & \quad + (d_k - d_m) m_3^T (N_7 R_2^{-1} N_7^T + \frac{1}{3} N_8 R_2^{-1} N_8^T + \frac{1}{5} N_9 R_2^{-1} N_9^T) m_3.
 \end{aligned}$$

由 Schur 补引理得, 若 $\Phi_0 + \Phi_4(d_k) \leq 0$ 成立, 当且仅当式(5-12)成立。因此若式(5-12)成立, 则 $\Phi_0 + \Phi_4(d_k) \leq 0$, 根据 L-K 泛函稳定性定理可知, 存在一个充分小的常量 ε , 使得 $\Delta V(k) \leq -\varepsilon \|x\|^2$ 成立, 系统(5-1)是渐近稳定的。证毕。

注 5-3 针对 ΔV 中出现的二重求和式，本章采用保守性较小的引理 5-3，同时，引理 5-3 是关于时滞仿射的，不需要再借助互凸不等式处理，因此有效降低了由于适用不等式技术引入的保守性。

5.4 数值算例

本节给出两个在相关文献中广泛研究的仿真案例，验证所提稳定性判据的正确性与优越性。

例 5-1 考虑如下离散线性时滞系统，

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.648 & 0.04 \\ 0.12 & 0.654 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1512 & -0.0518 \\ 0.0259 & -0.1091 \end{bmatrix} x(k-d_k)。$$

应用定理 5-2，可以通过 MATLAB 中的 LMI 工具箱，求解出该系统稳定所允许的最大时滞区间，得到的结果以及相关文献[79]和[103]的结果如表 5-1 所示。

表 5-1 给定 d_m 时所得的时滞上界 d_M

Table 5-1 The maximum admissible upper range d_M with different d_m

d_m	1	3	5	7	11	13
文献[79]	16	18	20	22	25	27
文献[103]	17	17	18	18	20	23
定理 5-2	19	20	21	23	26	28

从表 5-1 可以看出，对于所有给定的时滞下界值，定理 5-2 得到的时滞可行区间比其它文献结果更大，这体现了我们方法的优越性。

例 5-2 考虑如下离散时间线性时滞系统，

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.05 & 0.7 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix} x(k-d_k)。$$

应用定理 5-2，通过 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解出了该系统稳定所允许的最大时滞区间。所得结果与其它相关文献的结果如表 5-2 所示。

表 5-2 给定 d_m 时所得的时滞上界 d_M

Table 5-2 The maximum admissible upper range d_M with different d_m

d_m	2	5	6	7	10	20
文献[104]	7	9	10	11	14	24
文献[105]	8	10	11	12	15	25

文献[106]	9	11	12	13	16	26
文献[107]	12	14	15	16	19	29
定理 5-2	14	16	17	18	20	30

同样地，从表 5-2 可以看出，对于所有给定的时滞下界值，我们的结果优于相关文献的结果，说明本章所提方法具有较小的保守性。

5.5 本章小结

本章研究了离散线性时滞系统的稳定性问题，提出了一种新型求和不等式，引入了二重求和项。该不等式放松了 Wirtinger 求和不等式。通过构造合适的 L-K 泛函，结合新型求和不等式方法，建立了系统稳定性与时滞取值之间的关系，得到了保守性较小的基于 LMI 的时滞相关稳定判据。通过数值算例说明了该方法的有效性和优越性。

第6章 离散递归神经网络时滞系统的时滞 相关稳定性分析

本章研究了具有时变时滞和非线性扰动的离散时间递归神经网络(Discrete Recurrent Neural Networks, DRNNs)系统的时滞相关鲁棒稳定性问题。通过构建增广型 L-K 泛函, 利用第5章提出的求和不等式技术, 得到了 LMI 形式的具有时变时滞和非线性扰动的 DRNNs 的鲁棒稳定性的充分条件。同时给出了在不考虑扰动的情況下保守性较小的时滞相关稳定性条件。数值算例验证了方法的有效性和优越性。

6.1 引言

递归神经网络(Recurrent Neural Networks, RNNs)作为一类非线性系统, 通常被认为是一种简化的生物神经网络模型(动物的中枢神经系统, 特别是大脑)。近年来, RNNs 已经发展并成功应用于许多领域, 如信号处理、图像处理、联想存储器、模式识别、机器人和控制以及其他工程或科学领域^[108-110]。

由于执行器的开关速度和神经元固有的通信时间有限, 时滞现象不可避免, 考虑时滞现象的 RNNs 的稳定性分析研究具有重要的意义^[111-116]。文献[116]研究了时变时滞递归神经网络的鲁棒稳定性问题, 并得到了 LMI 形式的时滞相关鲁棒稳定性判据技术。文献[114]采用了时滞分割型 L-K 泛函, 研究了具有时滞的非线性神经网络系统渐近稳定问题, 并得到 LMI 形式的非线性神经网络时滞相关渐近稳定性判定条件。文献[117]通过构建完全型泛函, 研究了在常时滞和变时滞两种情况下静态神经网络的全局渐近鲁棒稳定性问题。相比连续时间递归神经网络系统, 离散时间递归神经网络(DRNNs)在当今的数字生产、生活中具有更大的适用性^[118-121]。文献[100]提出了新的激活条件构造方法, 结合增广型 L-K 泛函得到了时滞相关的离散时间递归神经网络系统的稳定性条件。基于 Wirtinger 求和不等式, 文献[122]提出了新型求和不等式, 并应用新型求和不等式得到了保守性较小的具有时变时滞的离散神经网络渐近的稳定性的充分条件。但是由于不等式本身的保守性问题, 仍然有改进的空间。

另一方面，在工程实践中，现场环境条件的不确定性是不容忽视的。在工程系统工作状态下都常常存在扰动，这些扰动在本质上可能是非线性的。DRNNs 在非线性和扰动作用下的鲁棒稳定性问题一直没有得到足够的重视，研究结果较少^[123,124]。因此，研究具有时变时滞和非线性扰动的 DRNNs 是非常必要的。

6.2 离散递归神经网络时滞系统模型及相关引理

离散时间递归神经网络时滞系统数学模型的一般形式如下，

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + W_0 g(x(k)) + W_1 g(x(k-d_k)) + \omega(k, x(k), x(k-d_k)), \\ x(s) = \phi(s) \quad s = -d_M, -d_M + 1, \dots, 0, \end{cases} \quad (6-1)$$

其中， $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T \in \mathbb{R}^n$ 为在 k 时刻神经网络的状态向量， $\phi(s)$ 为区间 $[-d_M, 0]$ 上的有界系统初始状态函数， $\omega(k, x(k), x(k-d_k))$ 为在 k 时刻的未知的非线性干扰，与系统当前、历史状态相关。 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $W_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，和 $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为系统反馈矩阵，其中 A 为自反馈矩阵，满足 $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ， W_1 为时滞反馈矩阵， $g(x(k)) = [g_1(x_1(k))g_2(x_2(k)) \cdots g_n(x_n(k))]^T \in \mathbb{R}^n$ 为在 k 时刻的神经元激励函数向量， d_k 是时变时滞，满足 $0 < d_m \leq d_k \leq d_M$ ，其中 d_M ， d_m 是正常数。定义 $d_{Mm} = d_M - d_m$ 。

为研究系统(6-1)的稳定性，激励函数 $g(x(k))$ 以及干扰 $\omega(k, x(k), x(k-d_k))$ 满足以下假设条件：

假设 6-1 在系统(6-1)中，神经元激励函数 $g_i(\cdot)$ ， $i=1,2,\dots,n$ 是有界的，并且对任意的 $x \in \mathbb{R}$ ， $x \neq 0$ ，有以下不等式成立，

$$k_i^- \leq \frac{g_i(x)}{x} \leq k_i^+, \quad (6-2)$$

其中， k_i^- ， k_i^+ 均为常数。

注 6-1 需要指出的是假设 6-1 在相关神经网络系统的研究文献中是很常见的，见文献[98,100,104]等，用于确保系统(6-1)的平衡点存在且唯一。若假设 6-1 成立，则有下式成立，

$$\begin{cases} k_i^- \leq k_i^+, \\ (g_i(x_i) - k_i^- x_i)(g_i(x_i) - k_i^+ x_i) \leq 0. \end{cases} \quad (6-3)$$

假设 6-2 在系统(6-1)中，干扰 $\omega(\cdot, \cdot, \cdot): \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足 $\omega(k, 0, 0) = 0$ 以及

$$\begin{aligned} & \omega(k, x(k), x(k-d_k))^T \omega(k, x(k), x(k-d_k)) \\ & \leq \rho_1^2 x^T(k) C C^T x(k) + \rho_2^2 x^T(k-d_k) D D^T x(k-d_k), \end{aligned} \quad (6-4)$$

其中, $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, C, D$ 是已知的常数矩阵。

我们给出本章所需要的引理(实际是本文的引理 5-3, 但为保证每章的完整性, 这里将其作为本章引理给出)。

引理 6-1 对于任意给定的正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 任意矩阵 $\bar{N}_1 \in \mathbb{R}^{4n \times n}, \bar{N}_2 \in \mathbb{R}^{4n \times n}$ 和 $\bar{N}_3 \in \mathbb{R}^{4n \times n}$, 整数 a , 以及整数 $n > 0$, 以及向量函数 $x(i): [a, a+n-1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定义 $y(i) = x(i+1) - x(i)$, 有如下不等式成立,

$$-\sum_{i=a}^{a+n-1} y^T(i) R y(i) \leq \omega^T \Omega_1 \omega, \quad (6-5)$$

其中,

$$\omega = \left[x^T(a+n), x^T(a), \frac{1}{n+1} \sum_{i=a}^{a+n} x^T(i), \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=a}^{a+n} \sum_{j=i}^{a+n} x^T(j) \right]^T,$$

$$\Pi_1 = e_1 - e_2,$$

$$\Pi_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3,$$

$$\Pi_3 = e_1 - e_2 + 6e_3 - 6e_4,$$

$$\Omega_1 = \text{sym} \left\{ \bar{N}_1 \Pi_1 + \bar{N}_2 \Pi_2 + \bar{N}_3 \Pi_3 \right\} + n(\bar{N}_1 R^{-1} \bar{N}_1^T + \frac{1}{3} \bar{N}_2 R^{-1} \bar{N}_2^T + \frac{1}{5} \bar{N}_3 R^{-1} \bar{N}_3^T).$$

6.3 时滞相关稳定性判据

定理 6-1 给定常值 d_m, d_M , 满足 $0 \leq d_m \leq d_M$, 定义 $d_{Mm} = d_M - d_m$ 。若存在一个正常数 ϵ , 正定对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 正定对角矩阵 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 任意矩阵 $N_i \in \mathbb{R}^{4n \times n}, i=1, 2, \dots, 9$ 满足下式

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ * & \Phi_3 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (6-6)$$

其中,

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & G_1^T P G_1 - G_0^T P G_0 + e_1^T Q_1 e_1 - e_2^T Q_1 e_2 + e_2^T Q_2 e_2 - e_4^T Q_2 e_4 + d_m (e_0 - e_1)^T R_1 (e_0 - e_1) \\ & + d_{Mm} (e_0 - e_1)^T R_2 (e_0 - e_1) + m_1^T \text{sym} \{ N_1 \Pi_1 + N_2 \Pi_2 + N_3 \Pi_3 \} m_1 \\ & + m_2^T \text{sym} \{ N_4 \Pi_1 + N_5 \Pi_2 + N_6 \Pi_3 \} m_2 + m_3^T \text{sym} \{ N_7 \Pi_1 + N_8 \Pi_2 + N_9 \Pi_3 \} m_3, \end{aligned}$$

$$\Phi_{12} = \text{sym} \left\{ (G_1 - G_0)^T P G(d_k) \right\} - \epsilon (e_{13}^T e_{13} - \rho_1^2 e_1^T C C^T e_1 - \rho_2^2 e_3^T D D^T e_3)$$

$$\begin{aligned}
 & - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 T & -\Delta_2 T \\ * & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_3 \\ e_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 L & -\Delta_2 L \\ * & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_{12} \end{bmatrix}, \\
 \Phi_2 = & \begin{bmatrix} m_1^T d_m N_1 & m_1^T d_m N_2 & m_1^T d_m N_3 & m_2^T \sqrt{d_M - d_k} N_4 & m_2^T \sqrt{d_M - d_k} N_5 \\ m_2^T \sqrt{d_M - d_k} N_6 & m_3^T \sqrt{d_k - d_m} N_7 & m_3^T \sqrt{d_k - d_m} N_8 & m_3^T \sqrt{d_k - d_m} N_9 \end{bmatrix}, \\
 \Phi_3 = & \text{diag} \{-d_m R_1, -3d_m R_1, -5d_m R_1, -R_2, -3R_2, -5R_2, -R_2, -3R_2, -5R_2\}, \\
 G_1 = & \begin{bmatrix} e_0^T & (d_m + 1)e_5^T - e_2^T & -e_3^T - e_4^T & \frac{1}{2}(d_m + 1)(d_m + 2)e_8^T - (d_m + 1)e_5^T \end{bmatrix}^T, \\
 G_0 = & \begin{bmatrix} e_1^T & (d_m + 1)e_5^T - e_1^T & -e_2^T - e_3^T & \frac{1}{2}(d_m + 1)(d_m + 2)e_8^T - (d_m + 1)e_1^T \end{bmatrix}^T, \\
 G(d_k) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & (d_M - d_k + 1)e_7^T + (d_k - d_m + 1)e_6^T & 0 \end{bmatrix}^T, \\
 \Delta_1 = & K^+ K^-, \quad \Delta_2 = \frac{K^+ + K^-}{2}, \\
 m_1 = & \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & e_5^T & e_8^T \end{bmatrix}^T, \\
 m_2 = & \begin{bmatrix} e_3^T & e_4^T & e_7^T & e_{10}^T \end{bmatrix}^T, \\
 m_3 = & \begin{bmatrix} e_2^T & e_3^T & e_6^T & e_9^T \end{bmatrix}^T, \\
 e_0 = & A e_1 + W_0 e_{11} + W_1 e_{12} + e_{13},
 \end{aligned}$$

则系统(6-1)满足渐近稳定。

证明 首先, 定义

$$\begin{aligned}
 \theta(k) = & [x^T(k) \quad \sum_{i=k-d_m}^{k-1} x^T(i) \quad \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} x^T(i) \quad \sum_{i=k-d_m}^{k-1} \sum_{j=i}^{k-1} x^T(j)]^T, \\
 \xi(k) = & [x^T(k) \quad x^T(k-d_m) \quad x^T(k-d_k) \quad x^T(k-d_M) \quad \frac{1}{d_m+1} \sum_{i=k-d_m}^k x^T(i) \\
 & \frac{1}{d_k-d_m+1} \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m} x^T(i) \quad \frac{1}{d_M-d_k+1} \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k} x^T(i) \quad v_1^T \quad v_2^T \quad v_3^T \\
 & g^T(x(k)) \quad g^T(x(k-d_k)) \quad \omega^T(k, x(k), x(k-d_k))] \quad (6-7)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 v_1(k) = & \frac{2}{(d_m+1)(d_m+2)} \sum_{i=k-d_m}^k \sum_{j=i}^k x(j), \\
 v_2(k) = & \frac{2}{(d_k-d_m+1)(d_k-d_m+2)} \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m} \sum_{j=i}^{k-d_m} x(j),
 \end{aligned}$$

$$v_3(k) = \frac{2}{(d_M - d_k + 1)(d_M - d_k + 2)} \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k} \sum_{j=i}^{k-d_k} x(j)。$$

针对系统(6-1)，选取直接构建型 L-K 泛函如下，

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k)， \quad (6-8)$$

其中，

$$\begin{aligned} V_1(k) &= \theta^T(k)P\theta(k)， \\ V_2(k) &= \sum_{i=k-d_m}^{k-1} x^T(i)Q_1x(i) + \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} x^T(i)Q_2x(i)， \\ V_3(k) &= \sum_{i=-d_m}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)R_1y(j)， \\ V_4(k) &= \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)R_2y(j)。 \end{aligned}$$

由定义(6-8)，得

$$\begin{aligned} y(k) &= x(k+1) - x(k) = (e_0 - e_1)\xi(k)， \\ \theta(k) &= (G_0 + G(d_k))\xi(k)， \\ \theta(k+1) &= \begin{bmatrix} x^T(k+1) & \sum_{i=k-d_m+1}^k x^T(i) & \sum_{i=k-d_M+1}^{k-d_m} x^T(i) & \sum_{i=k-d_m+1}^k \sum_{j=i}^k x^T(j) \end{bmatrix}^T \quad (6-9) \\ &= (G_1 + G(d_k))\xi(k)。 \end{aligned}$$

已知式(6-7)和式(6-9)，沿系统(6-1)的轨迹，计算 V_1 的前向差分得，

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) &= V_1(k+1) - V_1(k) \\ &= \theta^T(k+1)P\theta(k+1) - \theta^T(k)P\theta(k) \\ &= \xi(k)^T \left((G_1 + G(d_k))^T P (G_1 + G(d_k)) \right. \\ &\quad \left. - (G_0 + G(d_k))^T P (G_0 + G(d_k)) \right) \xi(k) \\ &= \xi(k)^T \left(G_1^T P G_1 - G_0^T P G_0 + \text{sym}\{(G_1 - G_0) P G(d_k)\} \right) \xi(k)。 \end{aligned} \quad (6-10)$$

计算 V_2 的前向差分得，

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) &= V_2(k+1) - V_2(k) \\ &= \sum_{i=k-d_m+1}^k x^T(i)Q_1x(i) + \sum_{i=k-d_M+1}^{k-d_m} x^T(i)Q_2x(i) - \sum_{i=k-d_m}^{k-1} x^T(i)Q_1x(i) \\ &\quad - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} x^T(i)Q_2x(i) \end{aligned} \quad (6-11)$$

$$\begin{aligned}
 &= x^T(k)Q_1x(k) - x^T(k-d_m)Q_1x(k-d_m) + x^T(k-d_m)Q_2x(k-d_m) \\
 &\quad - x^T(k-d_m)Q_2x(k-d_m) \\
 &= \xi(k)^T (e_1^T Q_1 e_1 - e_2^T Q_1 e_2 + e_2^T Q_2 e_2 - e_4^T Q_2 e_4) \xi(k).
 \end{aligned}$$

计算 V_3 的前向差分得,

$$\begin{aligned}
 \Delta V_3(k) &= V_3(k+1) - V_3(k) \\
 &= \sum_{i=-d_m}^{-1} \sum_{j=k+i+1}^k y^T(j)R_1y(j) - \sum_{i=-d_m}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)R_1y(j) \\
 &= d_m y^T(k)R_1y(k) - \sum_{i=k-d_m}^{k-1} y^T(i)R_1y(i).
 \end{aligned} \tag{6-12}$$

计算 V_4 的前向差分得,

$$\begin{aligned}
 \Delta V_4(k) &= V_4(k+1) - V_4(k) \\
 &= \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{j=k+i+1}^k y^T(j)R_2y(j) - \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)R_2y(j) \\
 &= d_{Mm} y^T(k)R_2y(k) - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} y^T(i)R_2y(i).
 \end{aligned} \tag{6-13}$$

对 $\Delta V_3(k)$ 和 $\Delta V_4(k)$ 中的求和表达式 $-\sum_{i=k-d_m}^{k-1} y^T(i)R_1y(i)$ 以及 $-\sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} y^T(i)R_2y(i)$, 应

用引理 6-1, 得

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{i=k-d_m}^{k-1} y^T(i)R_1y(i) \leq \xi^T(k)m_1^T\Omega_1m_1\xi(k), \\
 &-\sum_{i=k-d_M}^{k-d_m-1} y^T(i)R_2y(i) = -\sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} y^T(i)R_2y(i) - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} y^T(i)R_2y(i) \\
 &\leq \xi^T(k)(m_2^T\Omega_2m_2 + m_3^T\Omega_3m_3)\xi(k),
 \end{aligned} \tag{6-14}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= \text{sym}\{N_1\Pi_1 + N_2\Pi_2 + N_3\Pi_3\} \\
 &\quad + d_m(N_1R_1^{-1}N_1^T + \frac{1}{3}N_2R_1^{-1}N_2^T + \frac{1}{5}N_3R_1^{-1}N_3^T), \\
 \Omega_2 &= \text{sym}\{N_4\Pi_1 + N_5\Pi_2 + N_6\Pi_3\} \\
 &\quad + (d_M - d_k)(N_4R_2^{-1}N_4^T + \frac{1}{3}N_5R_2^{-1}N_5^T + \frac{1}{5}N_6R_2^{-1}N_6^T), \\
 \Omega_3 &= \text{sym}\{N_7\Pi_1 + N_8\Pi_2 + N_9\Pi_3\} \\
 &\quad + (d_k - d_m)(N_7R_2^{-1}N_7^T + \frac{1}{3}N_8R_2^{-1}N_8^T + \frac{1}{5}N_9R_2^{-1}N_9^T).
 \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\Delta V_3(k) &\leq \xi^T(k)(d_m(e_0 - e_1)^T R_1(e_0 - e_1) + m_1^T \Omega_1 m_1) \xi(k), \\ \Delta V_4(k) &\leq \xi^T(k)(d_{Mm}(e_0 - e_1)^T R_2(e_0 - e_1) + m_2^T \Omega_2 m_2 + m_3^T \Omega_3 m_3) \xi(k).\end{aligned}\quad (6-15)$$

综合式(6-10), (6-11), (6-12), (6-13), (6-14) 和式(6-15), 得到 V 的前向差分如下,

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) + \Delta V_4(k) \\ &\leq \xi^T(k)(\Phi_0 + \Phi_4(d_k)) \xi(k),\end{aligned}\quad (6-16)$$

其中,

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \Phi_{11} + m_1^T d_m (N_1 R_1^{-1} N_1^T + \frac{1}{3} N_2 R_1^{-1} N_2^T + \frac{1}{5} N_3 R_1^{-1} N_3^T) m_1, \\ \Phi_4(d_k) &= \text{sym} \left\{ (G_1 - G_0)^T P G(d_k) \right\} \\ &\quad + m_2^T (d_M - d_k) (N_4 R_2^{-1} N_4^T + \frac{1}{3} N_5 R_2^{-1} N_5^T + \frac{1}{5} N_6 R_2^{-1} N_6^T) m_2 \\ &\quad + m_3^T (d_k - d_m) (N_7 R_2^{-1} N_7^T + \frac{1}{3} N_8 R_2^{-1} N_8^T + \frac{1}{5} N_9 R_2^{-1} N_9^T) m_3.\end{aligned}$$

另外, 由假设 6-1 可知, 存在正定对角矩阵 L, T 使得下式成立,

$$\begin{aligned}H_1(k) &= \begin{bmatrix} y(k) \\ g(y(k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 T & -\Delta_2 T \\ * & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ g(y(k)) \end{bmatrix} \leq 0, \\ H_2(k) &= \begin{bmatrix} y(k - d_k) \\ g(y(k - d_k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 L & -\Delta_2 L \\ * & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k - d_k) \\ g(y(k - d_k)) \end{bmatrix} \leq 0.\end{aligned}\quad (6-17)$$

定义 $K^+ = \text{diag}\{k_1^+, k_2^+, \dots, k_n^+\}$, $K^- = \text{diag}\{k_1^-, k_2^-, \dots, k_n^-\}$ 。由假设 6-2 可知, 有任意正常数 ϵ 使得下式成立,

$$\begin{aligned}H_3(k) &= \epsilon (\omega(k, y(k), y(k - d_k)))^T \omega(k, y(k), y(k - d_k)) \\ &\quad - \rho_1^2 y^T(k) C C^T y(k) - \rho_2^2 y^T(k - d_k) D D^T y(k - d_k) \leq 0.\end{aligned}\quad (6-18)$$

结合式(6-17)和式(6-18)可知, L-K 泛函 V 的前向差分 $\Delta V(k)$ 满足

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &\leq \xi^T(k)(\Phi_0 + \Phi_4(d_k)) \xi(k) - H_1(k) - H_2(k) - H_3(k) \\ &= \xi^T(k) \Phi(d_k) \xi(k),\end{aligned}\quad (6-19)$$

其中,

$$\Phi(d_k) = \Phi_0 + \Phi_4(d_k) - \epsilon \left(e_{13}^T e_{13} - \rho_1 e_1^T C C^T e_1 - \rho_2 e_3^T D D^T e_3 \right) \\ - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 T & -\Delta_2 T \\ * & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_3 \\ e_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 L & -\Delta_2 L \\ * & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_{12} \end{bmatrix}.$$

由 Schur 补引理得, 若式(6-6)成立, 则 $\Phi(d_k) \leq 0$ 。根据 L-K 泛函稳定性定理可知, $\Delta V(k) \leq \xi^T(t) \Phi(d_k) \xi(t)$ 。若 $\Phi(d_k) \leq 0$, 则存在一个充分小的常量 ϵ , 使得 $\Delta V(k) \leq -\epsilon \|x\|^2 < 0$ 恒成立, 系统(6-1)是渐近稳定的。

注 6-2 针对 ΔV 中出现的二重求和式, 我们使用了保守性较小且关于时滞仿射的引理 6-1 进行放缩处理, 与 Wirtinger 求和不等式相比, 放松了不等式放缩条件, 使得结果具有一定的优越性。

注 6-3 考虑系统(6-1)的神经元激励函数 $g(y(k))$ 满足假设 6-1, 外部干扰项 ω 满足假设 6-2, 这两个假设条件在相关文献中是广泛使用的。由假设 6-1 和假设 6-2, 我们分别得到了式(6-17)和式(6-18), 对其进行放缩处理。

当 $\omega(k, x(k), x(k-d_k))=0$, 即不考虑外部干扰的影响时, 系统(6-1)退化成如下,

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + W_0 g(x(k)) + W_1 g(x(k-d_k)), \\ x(s) = \phi(s) \quad s = -d_M, -d_M+1, \dots, 0. \end{cases} \quad (6-20)$$

文献[98,100,104]研究了该系统的稳定性问题。本章针对系统(6-20), 给出以下定理。

定理 6-2 给定常值 d_m , d_M 满足 $0 \leq d_m \leq d_M$, 若存在一个正常数 ϵ , 正定对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 正定对角矩阵 $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 任意矩阵 $N_i \in \mathbb{R}^{4n \times n}$, $i=1,2,\dots,9$ 满足下式

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ * & \Phi_3 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (6-21)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & G_1^T P G_1 - G_0^T P G_0 + e_1^T Q_1 e_1 - e_2^T Q_1 e_2 + e_2^T Q_2 e_2 - e_4^T Q_2 e_4 + d_m (e_0 - e_1)^T R_1 (e_0 - e_1) \\ & + d_{Mm} (e_0 - e_1)^T R_2 (e_0 - e_1) + \text{sym} \left\{ (G_1 - G_0)^T P G(d_k) \right\} \\ & + m_1^T \text{sym} \{ N_1 \Pi_1 + N_2 \Pi_3 \} m_1 + m_2^T \text{sym} \{ N_4 \Pi_1 + N_5 \Pi_2 + N_6 \Pi_3 \} m_2 \\ & + m_3^T \text{sym} \{ N_7 \Pi_1 + N_8 \Pi_1 + N_8 \Pi_2 + N_9 \Pi_3 \} m_3 \\ & - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 T & -\Delta_2 T \\ * & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_3 \\ e_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_1 L & -\Delta_2 L \\ * & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_{12} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

而 $G_1, G_0, G(d_k), m_1, m_2, m_3, \Delta_1, \Delta_2, \Phi_2$, 和 Φ_3 的定义同定理 6-1 中定义相同, 其中

$$e_i = \begin{bmatrix} 0_{n \times (i-1)n} & I_n & 0_{n \times (12-i)n} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, 12,$$

$$e_0 = Ae_1 + W_0 e_{11} + W_1 e_{12},$$

则系统(6-20)满足渐近稳定。

证明 构建与定理 6-1 中相同的 L-K 泛函，在处理 L-K 泛函导数时，因为假设 6-2 不再需要，因此将式(6-18)去掉即可。证明过程与定理 6-1 的相似，不再赘述。

6.4 数值仿真

本节将使用下面的仿真案例来验证本章结果的有效性。

例 6-1 考虑如下离散时间递归神经网络时滞系统，

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.005 \end{bmatrix} g(x(k))$$

$$+ \begin{bmatrix} -0.1 & 0.01 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix} g(x(k-d_k)) + \omega(k, x(k), x(k-d_k)),$$

激活函数为 $g(x) = \tanh(x)$ ，当 $K^+ = I$ ， $K^- = 0$ 时满足假设 6-1。

首先，为验证本章结果的优越性，令 $\rho_1 = 0$ ， $\rho_2 = 0$ ，忽略外部干扰，系统退化为(6-20)的形式。应用定理 6-2，通过 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解出系统(6-1)在稳定前提下所允许的时滞上界，见表 6-1。从表 6-1 可以看到，相较于现有文献结果，应用定理 6-2 可以获得更大的时滞允许上界，说明定理 6-2 具有更小的保守性。

表 6-1 给定 d_m 时所得的时滞上界 d_M

Table 6-1 The maximum admissible upper range d_M with different d_m

d_m	2	4	6	8	10	15	20
文献[64]	11	12	13	14	16	19	23
文献[120]	15	15	17	18	19	22	26
文献[98]	16	18	18	20	20	23	27
文献[100](Th. 1)	20	20	20	21	21	23	26
文献[122]	19	19	20	20	21	24	27
定理 6-2	20	20	20	21	21	24	27

进一步地，当外部干扰不可忽略时，令 $C = D = I$ 时，由定理 6-1，通过 LMI 工具箱求解得不同 ρ_1 ， ρ_2 取值时系统稳定所允许的时滞上界，见表 6-2。从表 6-2 可

以看到，外部干扰的幅值越大，系统稳定所能允许的时滞上界越小。

表 6-2 当 ρ 取不同值时最大允许时滞区间

Table 6-2 The maximum admissible upper range d_M with different ρ

ρ		d_M
ρ_1	ρ_2	
0.01	0.01	26
0.01	0.02	17
0.02	0.02	16
0.03	0.03	11

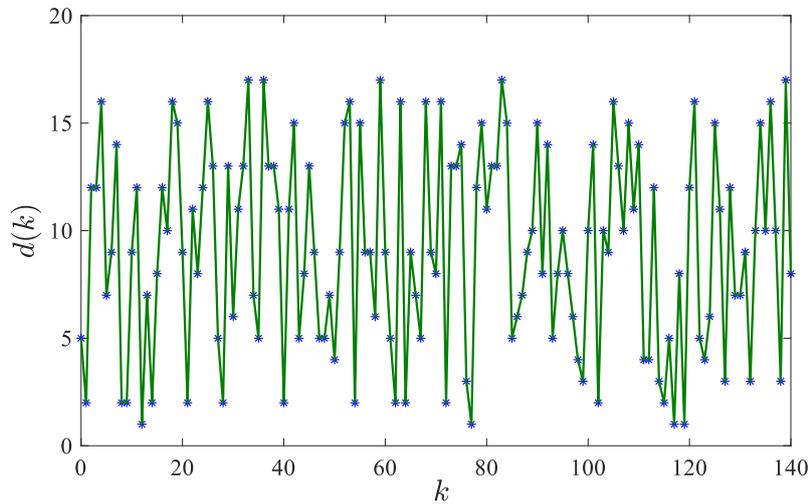


图 6-1 时变时滞

Fig. 6-1 The curve of time-varying delay

最后，给出该系统的状态轨迹。当 $\rho_1=0.01$ ， $\rho_2=0.02$ 时，时滞上界 d_M 取为 17 时，选取系统初始值为 $x_0=[3;-5]$ ，时变时滞变化曲线和外部干扰曲线分别如图 6-1 和图 6-2 所示时，则系统(6-1)的状态轨迹如图 6-3 所示。由图 6-3 可知，当外部干扰趋于 0 时，系统(6-1)的状态趋于平衡点处。仿真曲线验证了所得结果的有效性。

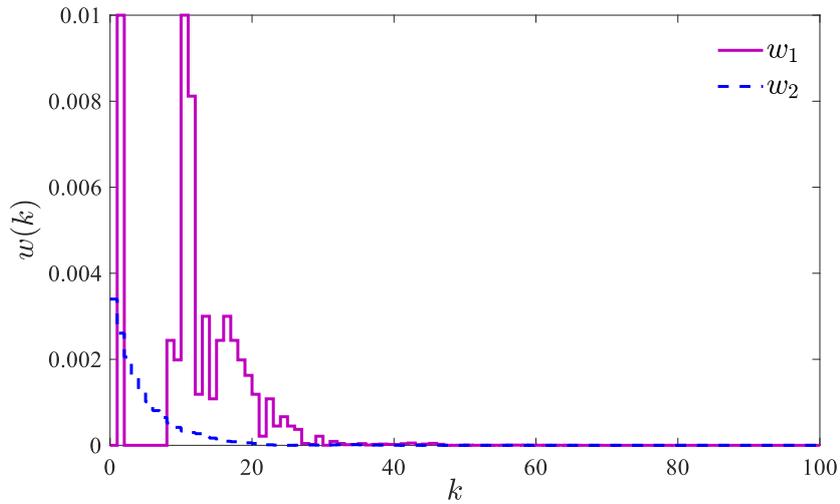


图 6-2 外部干扰

Fig. 6-2 The curve of external disturbance

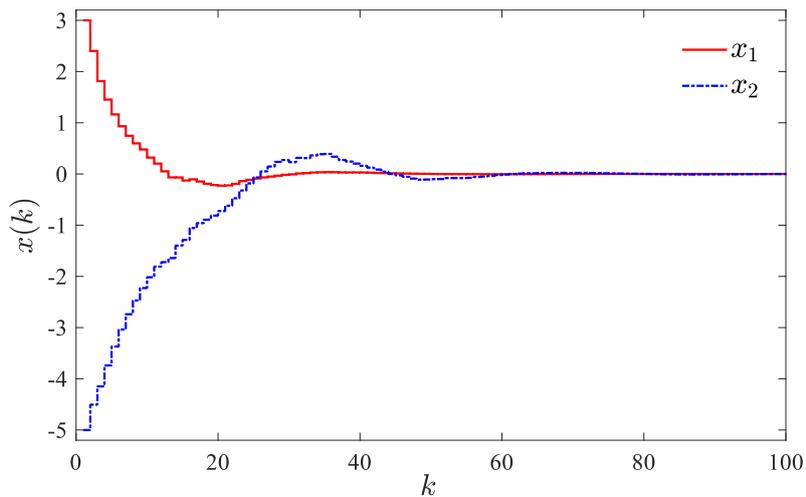


图 6-3 状态轨迹

Fig. 6-3 The response of the state variables

6.5 本章小结

本章研究了具有时变时滞和非线性扰动的离散时间递归神经网络系统的时滞相关鲁棒稳定性问题。通过构建直接构建型 L-K 泛函，利用新型求和不等式，建立了 DRNNs 鲁棒稳定性与时滞取值之间的关系；当外部干扰不存在时，给出了保守性较小的 LMI 形式的稳定性充分条件。数值仿真说明了所得判据的有效性和优越性。

第 7 章 T-S 模糊时滞系统的时滞相关稳定性 分析及控制

本章研究了 Takagi-Sugeno (T-S)模糊时滞系统的稳定性及采样控制问题。考虑到 t_k 到 t 和 t 到 t_{k+1} 区间内的状态信息, 提出了一种新的双边时滞相关环函数, 它的引入不仅能放松 L-K 泛函的单调递减约束, 而且能更加充分地利用系统的采样控制信息。所设计的采样控制器既包含当前状态信息, 又包含过去的状态信息, 从而提高了控制性能和设计的灵活性。基于新的泛函形式和改进的不等式技术, 得到 LMI 形式的 T-S 模糊时滞系统的稳定性准则及控制器设计判据。数值仿真验证了方法的有效性。

7.1 引言

Tagaki-Sugeno (T-S)模糊模型因处理复杂非线性系统的方便性和灵活性而闻名, 并在许多实际工程系统中得到广泛应用^[125-127]。在任何凸紧集内, T-S 模糊模型可以以任意精度逼近任意光滑的非线性函数, 将复杂的非线性系统表示为多个子线性系统的模糊加权的形式, 使得我们可以应用较为成熟完备的线性系统理论来研究复杂非线性系统。近年来, 基于 T-S 模糊模型的非线性系统理论研究引起了越来越多的关注^[128-131]。

考虑到时滞现象在实际生活、生产广泛存在, 且常常会使系统的性能变差, T-S 模糊时滞系统的稳定性分析和控制问题受到了特别关注^[81,129-132]。基于时滞分割型 L-K 泛函方法, 文献[80]研究了含不确定性的 T-S 模糊时滞系统的稳定性分析和控制问题。通过构建增广型 L-K 泛函和 LMI 方法, 文献[81]得到了 T-S 模糊时变时滞系统渐近稳、镇定的充分条件。文献[129]采用了 Wirtinger 积分不等式方法和改进的互凸组合技术得到了改进文献[81]的 T-S 模糊时变时滞系统稳定性准则。随着数字计算机和通信网络的迅速发展, 越来越多的数字控制器被应用到工业应用中, 这类闭环控制系统称为采样控制系统^[133-135]。目前研究分析采样控制系统的方法有几种, 包括离散时间设计法^[135]、脉冲跳变法^[136]、输入时滞法^[137]等。输入时滞法是将

同时含有连续、离散信号的采样控制系统转化为完全的时间系统，采用现有的时滞系统分析方法进行研究。基于输入时滞法，在文献[138]中构建了一种新的 L-K 泛函，研究了变采样条件下模糊系统的采样控制问题，改进了文献[139]的结果。不论是离散时间设计法，脉冲跳变法、输入时滞法都需要系统模型转化，而这种转化过程通常会引入一定的保守性。最近，文献[140]提出了环函数法，不需要系统模型转化，而且充分利用了采样系统本身具有的离散属性，改善了现有的 L-K 泛函的构建和分析方法。常用的 L-K 泛函分析法要求 L-K 泛函在整个时间轴上单调递减，但环函数的引入可以放松这一条件，只要求 L-K 泛函在采样点单调递减。Zeng 等人提出了一种新的双边环函数，将 t_k 到 t 和 t 到 t_{k+1} 的时间间隔内的状态信息考虑在内，并得到了改进的稳定性条件^[141]。基于环函数的思想，文献[142]采用了一种记忆采样数据控制方案来解决 T-S 模糊系统的稳定性问题。文献[143]基于 Wirtinger 不等式的 LKF 方法，设计一种新的模糊时滞采样数据控制器，得到了保守性较小的稳定准则。

当时滞现象和采样控制不可避免时，普通的非线性系统变成了基于采样控制的时滞非线性系统，如高炉冶炼系统，化工系统中常见的各种搅拌反应器系统等等。然而，相关的文献研究却很少。文献[144]针对具有参数不确定性和时滞 T-S 模糊系统，提出了一种鲁棒保成本模糊采样控制器。但考虑到不等式技术本身的保守性，和实际采样模式的可用信息尚未得到充分考虑，仍然存在进一步改善的空间。

7.2 T-S 模糊时滞系统模型及相关引理

考虑下列连续 T-S 模糊时滞系统模型，

被控对象模糊规则 i ：如果 $\theta_1(t)$ 是 M_{i1} ， $\theta_2(t)$ 是 M_{i2} ，...，和 $\theta_p(t)$ 是 M_{ip} ，则

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{\tau i} x(t-\tau) + B_i u(t), \\ x(s) = \phi(s) \quad s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (7-1)$$

其中， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态， $\phi(s)$ 为区间 $[-\tau, 0]$ 上的有界系统初始状态函数。 $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $A_{\tau i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为常数系统矩阵， $\tau > 0$ 为常时滞， $u(t)$ 为系统外部输入， $\theta(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_p(t)]$ 为与外部输入 $u(t)$ 不相关的前件变量， $M_{il} (i=1, 2, \dots, r, l=1, 2, \dots, p)$ 为模糊集， r 为模糊规则的个数。

定义 $M_{ij}(\theta(t))$ 是变量 $\theta(t)$ 关于模糊集 M_{ij} 的隶属度函数。经过单点模糊，乘积

推理和加权平均去模糊化, 得到如下 T-S 模糊模型:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(\theta(t)) [A_i x(t) + A_{\tau i} x(t-\tau) + B_i u(t)], \quad (7-2)$$

其中, $\lambda_i(\theta(t)) = \frac{w_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\theta(t))}$, $w_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(\theta(t))$ 。 $w_i(\theta(t))$ 是所有和第 i 条模糊

规则相关的隶属函数乘积, 表示第 i 条模糊规则被激活的概率。假设至少存在一个隶属函数, 即 $w_i(\theta(t)) \geq 0$, $\sum_{i=1}^r w_i(\theta(t)) > 0$ 。 $\lambda_i(\theta(t))$ 是第 i 条模糊规则归一化后的隶

属度函数, 显然有以下关系式成立,

$$\lambda_i(\theta(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i(\theta(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\lambda}_i(\theta(t)) = 0. \quad (7-3)$$

假定我们需要利用计算机实现对被控对象(7-1)的控制, 系统的状态反馈信号通过采样环节传输到控制器, 控制器输入在零阶保持器的作用下维持这一值直到下一个采样时刻的状态反馈信号到来, 控制器输入得以更新。采样时刻满足

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty. \quad (7-4)$$

针对被控对象(7-1), 基于平行分布补偿(Parallel Distributed Compensation, PDC)策略, 设计模糊采样控制器如下:

控制器模糊规则 j : 如果 $\theta_1(t_k)$ 是 M_{j1} , ..., 和 $\theta_p(t_k)$ 是 M_{jp} , 则

$$u(t) = K_j x(t_k) + K_{\tau j} x(t_k - \tau), \quad t \in \Omega^k, \quad (7-5)$$

其中, $\Omega^k = [t_k, t_{k+1})$ 。本文考虑变采样控制, 即 $0 < t_{k+1} - t_k = h_k \leq h$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

全局控制器可以写为以下更为简洁的形式,

$$u(t) = \sum_{j=1}^r \lambda_j(\theta(t_k)) (K_j x(t_k) + K_{\tau j} x(t_k - \tau)), \quad t \in \Omega^k. \quad (7-6)$$

结合被控对象(7-1)和所设计的控制器(7-6), 得闭环模糊系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\theta(t)) \lambda_j(\theta(t_k)) \\ & \times (A_i x(t) + A_{\tau i} x(t-\tau) + B_i K_j x(t_k) + B_i K_{\tau j} x(t_k - \tau)), \quad t \in \Omega^k. \end{aligned} \quad (7-7)$$

注 7-1 由式(7-7)可知, 由于 T-S 系统模型是全局连续的, 所满足的模糊规则的前件变量也是连续的, 而采样模糊控制器由于零阶保持器的存在是分段连续的, 所满足的模糊规则的前件变量也是分段连续的, 二者满足的模糊规则并不完全相同, 所构成的闭环系统则含有两种不同的隶属度函数。由于隶属度函数本身的性质(7-3), 可得 $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\theta(t))\lambda_j(\theta(t_k))=1$ 。

引理 7-1^[140] 对任意 $k \in \mathbb{N}$, t_k 和 t_{k+1} 为连续的两个采样时间点, 满足 $T_1 \leq t_{k+1} - t_k \leq T_2$, 其中 T_1, T_2 均为正常数, 满足 $0 < T_1 \leq T_2$ 。 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是可微分函数, 存在正常值 μ_1, μ_2 和 p 满足

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \mu_1 |x|^p \leq V(x) \leq \mu_2 |x|^p,$$

则有以下两种说法等价:

- 1) $\Delta V_k = V(x(t_{k+1})) - V(x(t_k)) < 0$ 。
- 2) 存在一个连续可微函数 $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$w(x(t_{k+1})) = w(x(t_k)),$$

且对任意 $t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$\dot{W}(x(t)) = \dot{V}(x(t)) + \dot{w}(x(t)) < 0。$$

注 7-2 此引理可用于对采样控制系统的稳定性分析中。例如考虑如下的采样控制系统,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t_k) \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

若可以构建泛函 V, w 使得引理 7-1 中的任一说法成立, 则可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} V \rightarrow 0$, 该系统满足渐近稳定。

引理 7-2^[34] 对于任意对称正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和连续函数 $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 有如下不等式成立,

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq -\frac{1}{(b-a)} \psi_0^T R \psi_0 - \frac{3}{(b-a)} \psi_1^T R \psi_1 - \frac{5}{(b-a)} \psi_2^T R \psi_2, \quad (7-8)$$

其中,

$$\begin{aligned} \psi_0 &= x(b) - x(a), \quad \psi_1 = x(b) + x(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b x(s) ds, \\ \psi_2 &= x(b) - x(a) + \frac{6}{b-a} \int_a^b x(s) ds - \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_s^b x(\theta) d\theta ds. \end{aligned}$$

引理 7-3^[89] 对任意对称正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和连续函数 $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 存在任意矩阵 $N_1 \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $N_2 \in \mathbb{R}^{k \times n}$ 和任意函数向量 $\xi(t) \in \mathbb{R}^k$ 使得如下不等式成立,

$$-\int_a^b \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \leq \xi^T(t) \left((b-a)(N_1 R^{-1} N_1^T + \frac{1}{3} N_2 R^{-1} N_2^T) + \text{sym}\{N_1 \psi_0 + N_2 \psi_1\} \right) \xi(t). \quad (7-9)$$

引理 7-4^[33] 若连续函数 $z(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足 $z(0) = 0$, 则对任意对称正定矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 有如下不等式成立,

$$\int_a^b z^T(s) R z(s) ds \leq \frac{4(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \dot{z}^T(s) R \dot{z}(s) ds. \quad (7-10)$$

7.3 主要结果

为使表达简洁, 我们给出如下定义,

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \text{col} \left\{ x(t), x(t-\tau), \int_{t-\tau}^t x(s) ds, \int_{t-\tau}^t \int_s^t x(\theta) d\theta ds \right\}, \\ \eta_2(t) &= \text{col} \{ \dot{x}(t), x(t) \}, \quad v_1(t) = \frac{1}{t-t_k} \int_{t_k}^t x(s) ds, \\ v_2(t) &= \frac{1}{t_{k+1}-t} \int_t^{t_{k+1}} x(s) ds, \quad v_3(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t x(s) ds, \\ v_4(t) &= \frac{2}{\tau^2} \int_{t-\tau}^t \int_s^t x(\theta) d\theta ds, \quad v_5(t) = \text{col} \{ x(t) - x(t_k), x(t-\tau) - x(t_k - \tau) \}, \\ v_6(t) &= x(t_{k+1}) - x(t), \quad \chi_1(t) = \text{col} \{ (t_{k+1} - t) v_5, (t - t_k) v_6 \}, \\ \chi_2(t) &= \text{col} \{ v_5, v_6 \}, \quad \chi_3(t) = \text{col} \{ x(t_k), x(t_{k+1}), x(t_k - \tau) \}, \\ \chi_4(t) &= \text{col} \{ \chi_3, v_1(t), v_2(t) \}, \\ \xi(t) &= \text{col} \{ x(t), x(t-\tau), x(t_k), x(t_{k+1}), x(t_k - \tau), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\tau), v_1(t), \\ &\quad v_2(t), v_3(t), v_4(t) \}. \end{aligned}$$

7.3.1 时滞相关稳定性判据

定理 7-1 对于给定的闭环模糊系统(7-7), 假设控制器增益 K_j, K_{τ_j} 已知, 若存在正常值 τ, h , 正定对称矩阵 $P \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 任意对称矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{5n \times 5n}$, 任意矩阵 $Y_1 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $X \in \mathbb{R}^{2n \times n}$, $G_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 和 $N_{i,j}^l \in \mathbb{R}^{11n \times n}$, $i, j=1, 2, \dots, r$, $l=1, 2, 3, 4$ 满足下式

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \Xi_{ij}^0 + h\Xi_{ij}^1 & hN_{ij}^1 & hN_{ij}^2 \\ * & -hR_2 & 0 \\ * & * & -3hR_2 \end{bmatrix} < 0, \\
 & \begin{bmatrix} \Xi_{ij}^0 + h\Xi_{ij}^2 & hN_{ij}^3 & hN_{ij}^4 \\ * & -hR_1 & 0 \\ * & * & -3hR_1 \end{bmatrix} < 0, \\
 & \Xi_{ij}^0 < 0,
 \end{aligned} \tag{7-11}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \Xi_{ij}^0 &= \text{sym} \left\{ \Pi_3^T P \Pi_4 + \Pi_{12}^{0T} Y_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{0T} Y_2 \Pi_9 + \Pi_{14}^T X \Pi_{16} \right. \\
 &\quad - \Pi_{10}^T X e_6 + N_{ij}^1 \Pi_{16} + N_{ij}^2 \Pi_{17} + N_{ij}^3 \Pi_{18} + N_{ij}^4 \Pi_{19} \left. \right\} + \Pi_5^T Q \Pi_5 \\
 &\quad - \Pi_6^T Q \Pi_6 + \tau^2 e_6^T T e_6 - \Pi_0^T T \Pi_0 - 3 \Pi_1^T T \Pi_1 \\
 &\quad - 5 \Pi_2^T T \Pi_2 + h^2 e_7^T S e_7 - \frac{\pi^2}{4} (e_2 - e_5)^T S (e_2 - e_5) + F_{ij}, \\
 \Xi_{ij}^1 &= \text{sym} \left\{ \Pi_{12}^{1T} Y_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{1T} Y_2 \Pi_9 + \Pi_7^{1T} Y_1 \Pi_{13} + \Pi_{15}^{1T} Z \Pi_{11} \right\} \\
 &\quad + \Pi_{11}^T Z \Pi_{11} + e_6^T R_1 e_6, \\
 \Xi_{ij}^2 &= \text{sym} \left\{ \Pi_{12}^{2T} Y_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{2T} Y_2 \Pi_9 + \Pi_7^{2T} Y_1 \Pi_{13} + \Pi_{15}^{2T} Z \Pi_{11} \right\} \\
 &\quad - \Pi_{11}^T Z \Pi_{11} + e_6^T R_2 e_6, \\
 F_{ij} &= \text{sym} \left\{ (e_1^T G_1 + e_2^T G_2 + e_3^T G_3 + e_6^T G_4) (-e_6 + A_i e_1 \right. \\
 &\quad \left. + A_{\tau i} e_2 + B_i K_j e_3 + B_i K_{\tau j} e_5) \right\}, \\
 \Pi_0 &= e_1 - e_2, \quad \Pi_1 = e_1 + e_2 - 2e_{10}, \\
 \Pi_2 &= e_1 - e_2 + 6e_{10} - 6e_{11}, \\
 \Pi_3 &= \text{col} \left\{ e_1, e_2, \tau e_{10}, \frac{\tau^2}{2} e_{11} \right\}, \\
 \Pi_4 &= \text{col} \{ e_6, e_7, e_1 - e_2, \tau (e_1 - e_{10}) \}, \\
 \Pi_5 &= \text{col} \{ e_6, e_1 \}, \quad \Pi_6 = \text{col} \{ e_7, e_2 \}, \\
 \Pi_7^1 &= \text{col} \{ e_1 - e_3, e_2 - e_5, 0 \}, \\
 \Pi_7^2 &= \text{col} \{ 0, 0, e_4 - e_1 \}, \quad \Pi_8 = \Pi_7^1 + \Pi_7^2, \\
 \Pi_9 &= \text{col} \{ e_3, e_4, e_5 \}, \quad \Pi_{10} = \text{col} \{ e_1 - e_3, e_2 - e_5 \}, \\
 \Pi_{11} &= \text{col} \{ e_3, e_4, e_5, e_8, e_9 \}, \quad \Pi_{12}^0 = -\Pi_7^1 + \Pi_7^2, \\
 \Pi_{12}^1 &= \text{col} \{ e_6, e_7, 0 \}, \quad \Pi_{12}^2 = \text{col} \{ 0, 0, -e_6 \}, \\
 \Pi_{13} &= \Pi_{12}^1 + \Pi_{12}^2, \quad \Pi_{14} = \text{col} \{ e_6, e_7 \},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{15}^1 &= \text{col}\{0, 0, 0, e_1 - e_8, 0\}, \\ \Pi_{15}^2 &= \text{col}\{0, 0, 0, 0, e_9 - e_1\}, \\ \Pi_{16} &= e_4 - e_1, \quad \Pi_{17} = e_4 + e_1 - 2e_9, \\ \Pi_{18} &= e_1 - e_3, \quad \Pi_{19} = e_1 + e_3 - 2e_8.\end{aligned}$$

则系统(7-7)是渐近稳定的。

证明 针对系统(7-7)，构建如下函数，

$$W(t) = V_1(t) + V_2(t) + w_1(t) + w_2(t), \quad (7-12)$$

其中，

$$\begin{aligned}V_1(t) &= \eta_1^T(t)P\eta_1(t) + \int_{t-\tau}^t \eta_2^T(s)Q\eta_2(s)ds + \tau \int_{t-\tau}^t \int_s^t \dot{x}^T(\theta)T\dot{x}(\theta)d\theta ds \\ V_2(t) &= h^2 \int_{t_k-\tau}^{t-\tau} \dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds \\ &\quad - \frac{\pi^2}{4} \int_{t_k-\tau}^{t-\tau} (x(s) - x(t_k - \tau))^T S (x(s) - x(t_k - \tau)) ds \\ w_1(t) &= 2\chi_1^T(t)(Y_1\chi_2(t) + Y_2\chi_3(t)) + 2v_5^T(t)Xv_6(t) \\ &\quad + (t_{k+1} - t)(t - t_k)\chi_4^T(t)Z\chi_4(t) \\ w_2(t) &= (t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds - (t - t_k) \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds\end{aligned} \quad (7-13)$$

$V(t)$ 是直接构建型 L-K 泛函。由 $P > 0$ ， $Q > 0$ ，和 $T > 0$ ， $V_1(t)$ 的正定性得以保证，由引理 7-4 可知， $V_2(t) \geq 0$ 。因此 $V(t) \geq 0$ 成立。 $w(t)$ 是我们引入的双边环函数，满足 $w(t_k) = w(t_{k+1})$ 。由引理 7-1 可知， $w(t)$ 不需要满足正定性。

首先，沿系统(7-7)的轨迹，计算 \dot{W} 得，

$$\dot{W}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{w}_1(t) + \dot{w}_2(t), \quad (7-14)$$

其中，

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= 2\eta_1^T(t)P\dot{\eta}_1(t) + \eta_2^T(t)Q\dot{\eta}_2(t) - \eta_2^T(t - \tau)Q\dot{\eta}_2(t - \tau) + \tau^2 \dot{x}^T(t)T\ddot{x}(t) \\ &\quad - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s)T\ddot{x}(s)ds, \\ \dot{V}_2(t) &= h^2 \dot{x}^T(t - \tau)S\ddot{x}(t - \tau) \\ &\quad - \frac{\pi^2}{4} (x(t - \tau) - x(t_k - \tau))^T S (x(t - \tau) - x(t_k - \tau)), \\ \dot{w}_1(t) &= 2\dot{\chi}_1^T(t)(Y_1\chi_2(t) + Y_2\chi_3(t)) + 2\chi_1^T(t)Y_1\dot{\chi}_2(t) + 2v_5^T(t)X\dot{v}_6(t) \\ &\quad + 2v_5^T(t)X\dot{v}_6(t) - (t - t_k)\chi_4^T(t)Z\dot{\chi}_4(t) + (t_{k+1} - t)\chi_4^T(t)Z\dot{\chi}_4(t) \\ &\quad + 2(t_{k+1} - t)(t - t_k)\dot{\chi}_4^T(t)Z\dot{\chi}_4(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{w}_2(t) &= (t_{k+1} - t) \dot{x}^T(t) R_1 \dot{x}(t) - \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds + (t - t_k) \dot{x}^T(t) R_2 \dot{x}(t) \\ &\quad - \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds.\end{aligned}$$

进而得

$$\begin{aligned}\dot{W}(t) &= \xi^T (\text{sym}\{\Pi_3^T P \Pi_4 + \Pi_{12}^{0T} Y_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{0T} Y_2 \Pi_9 + \Pi_{14}^T X \Pi_{16} - \Pi_{10}^T X e_6 \\ &\quad + (t_{k+1} - t)(\Pi_{12}^{1T} Y_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{1T} Y_2 \Pi_9 + \Pi_7^{1T} Y_1 \Pi_{13} + \Pi_{15}^{1T} Z \Pi_{11}) \\ &\quad + (t - t_k)(\Pi_{12}^{2T} Y_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{2T} Y_2 \Pi_9 + \Pi_7^{2T} Y_1 \Pi_{13} + \Pi_{15}^{2T} Z \Pi_{11})\}) \\ &\quad + \tau^2 e_6^T T e_6 + \Pi_5^T Q \Pi_5 - \Pi_6^T Q \Pi_6 + h^2 e_7^T S e_7 - \frac{\pi^2}{4} (e_2 - e_3)^T S (e_2 - e_3) \\ &\quad + (t_{k+1} - t)(\Pi_{11}^T Z \Pi_{11} + e_6^T R_1 e_6) + (t - t_k)(-\Pi_{11}^T Z \Pi_{11} + e_6^T R_2 e_6) \xi \\ &\quad - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) T \dot{x}(s) ds - \int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds - \int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds.\end{aligned}\quad (7-15)$$

由引理 7-2 得

$$-\tau \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(s) T \dot{x}(s) ds \leq -\xi^T(t) (\Pi_0^T T \Pi_0 + 3\Pi_1^T T \Pi_1 + 5\Pi_2^T T \Pi_2) \xi(t). \quad (7-16)$$

由引理 7-3 得

$$\begin{aligned}-\int_t^{t_{k+1}} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds &\leq \xi^T(t) \Omega_1 \xi(t), \\ -\int_{t_k}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds &\leq \xi^T(t) \Omega_2 \xi(t),\end{aligned}\quad (7-17)$$

其中,

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= (t_{k+1} - t) (N_{ij}^1 R_2^{-1} N_{ij}^{1T} + \frac{1}{3} N_{ij}^2 R_2^{-1} N_{ij}^{2T}) + \text{sym}\{N_{ij}^1 \Pi_{16} + N_{ij}^2 \Pi_{17}\}, \\ \Omega_2 &= (t - t_k) (N_{ij}^3 R_1^{-1} N_{ij}^{3T} + \frac{1}{3} N_{ij}^4 R_1^{-1} N_{ij}^{4T}) + \text{sym}\{N_{ij}^3 \Pi_{18} + N_{ij}^4 \Pi_{19}\}.\end{aligned}$$

另外, 对任意的全秩矩阵 G_1, G_2, G_3, G_4 , 由闭环系统模型(7-7)易得

$$\begin{aligned}0 &= 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\theta(t)) \lambda_j(\theta(t_k)) \xi^T(t) (e_1^T G_1 + e_2^T G_2 + e_3^T G_3 + e_6^T G_4) \\ &\quad \times (-e_6 + A_i e_1 + A_{ci} e_2 + B_i K_j e_3 + B_i K_{\tau j} e_5) \xi(t).\end{aligned}\quad (7-18)$$

联立式(7-15), (7-16), (7-17), 以及(7-18), 得

$$\dot{W}(t) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\theta(t)) \lambda_j(\theta(t_k)) \xi^T(t) \tilde{\Xi}_{ij} \xi(t), \quad (7-19)$$

其中,

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi}_{ij} &= \Xi_{ij}^0 + (t_{k+1} - t)\tilde{\Xi}_{ij}^1 + (t - t_k)\tilde{\Xi}_{ij}^2, \\ \tilde{\Xi}_{ij}^1 &= \Xi_{ij}^1 + N_{ij}^1 R_2^{-1} N_{ij}^{1T} + \frac{1}{3} N_{ij}^2 R_2^{-1} N_{ij}^{2T}, \\ \tilde{\Xi}_{ij}^2 &= \Xi_{ij}^2 + N_{ij}^3 R_1^{-1} N_{ij}^{3T} + \frac{1}{3} N_{ij}^4 R_1^{-1} N_{ij}^{4T}.\end{aligned}$$

对式(7-19)作简单的数学变换得,

$$\begin{aligned}\dot{W}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\theta(t)) \lambda_j(\theta(t_k)) \xi^T(t) \left(\frac{t_{k+1} - t}{h_k} (\Xi_{ij}^0 + h_k \tilde{\Xi}_{ij}^1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t - t_k}{h_k} (\Xi_{ij}^0 + h_k \tilde{\Xi}_{ij}^2) \right) \xi(t),\end{aligned}\tag{7-20}$$

则有若

$$\begin{aligned}\Xi_{ij}^0 + h_k \tilde{\Xi}_{ij}^1 &< 0, \\ \Xi_{ij}^0 + h_k \tilde{\Xi}_{ij}^2 &< 0, \\ \Xi_{ij}^0 &< 0,\end{aligned}\tag{7-21}$$

成立, 则有 $\tilde{\Xi}_{ij} < 0$ 成立。由 Schur 补引理, 若式(7-11)成立, 则式(7-21)成立, 因此可知 $\tilde{\Xi}_{ij} < 0$ 成立, 进而得 $\dot{W}(t) \leq 0$ 。由引理 7-1, 闭环系统(7-7)是渐近稳定的。证毕。

注 7-3 针对 T-S 模糊时滞系统, 定理 7-1 提出了一种基于双边环函数和 L-K 泛函相结合的分析方法, 得到了保守性较小的时滞相关稳定判据。通过双边环函数的引入使得每个采样区间 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 的信息得到充分的利用, 有效降低结果的保守性。

注 7-4 虽然定理 7-1 是针对模糊系统(7-7)中时滞为定常时滞时给出的, 但由于模糊时滞系统是线性时滞系统的模糊加权和, 线性时变时滞系统的分析方法仍然适用, 因此定理 7-1 可以推广到相应的时变时滞的情况。

7.3.2 采样控制器设计

当采样控制器控制增益未知, 需要求取时, 此时定理 7-1 给出的稳定性判据不再是可以求取的 LMI, 此时需要做相应的变换, 将其转化为 LMI。我们有以下定理,

定理 7-2 对于闭环模糊系统(7-2), 若存在正常值 τ , h , λ_k , $k=1,2,3$, 正定对称矩阵 $\bar{P} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$, $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\bar{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{R}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 任意对称矩阵 $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{5n \times 5n}$, 和任意矩阵 $\bar{Y}_1 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $\bar{Y}_2 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, $\bar{X} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$\bar{N}_{i,j}^l \in \mathbb{R}^{11n \times n}$, $i, j=1, 2, \dots, r$, $l=1,2,3,4$ 满足下式

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{ij}^0 + h\bar{\Xi}_{ij}^1 & h\bar{N}_{ij}^1 & h\bar{N}_{ij}^2 \\ * & -h\bar{R}_2 & 0 \\ * & * & -3h\bar{R}_2 \end{bmatrix} < 0, \\ & \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{ij}^0 + h\bar{\Xi}_{ij}^2 & h\bar{N}_{ij}^3 & h\bar{N}_{ij}^4 \\ * & -h\bar{R}_1 & 0 \\ * & * & -3h\bar{R}_1 \end{bmatrix} < 0, \\ & \bar{\Xi}_{ij}^0 < 0, \end{aligned} \quad (7-22)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_{ij}^0 &= \text{sym} \left\{ \Pi_3^T \bar{P} \Pi_4 + \Pi_{12}^{0T} \bar{Y}_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{0T} \bar{Y}_2 \Pi_9 + \Pi_{14}^T \bar{X} \Pi_{16} \right. \\ & \quad \left. - \Pi_{10}^T \bar{X} e_6 + \bar{N}_{ij}^1 \Pi_{16} + \bar{N}_{ij}^2 \Pi_{17} + \bar{N}_{ij}^3 \Pi_{18} + \bar{N}_{ij}^4 \Pi_{19} \right\} \\ & \quad + \Pi_5^T \bar{Q} \Pi_5 - \Pi_6^T \bar{Q} \Pi_6 + \tau^2 e_6^T \bar{T} e_6 - \Pi_0^T \bar{T} \Pi_0 - 3\Pi_1^T \bar{T} \Pi_1 \\ & \quad - 5\Pi_2^T \bar{T} \Pi_2 + h^2 e_7^T \bar{S} e_7 - \frac{\pi^2}{4} (e_2 - e_5)^T \bar{S} (e_2 - e_5) + \bar{F}_{ij}, \\ \bar{\Xi}_{ij}^1 &= \text{sym} \left\{ \Pi_{12}^{1T} \bar{Y}_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{1T} \bar{Y}_2 \Pi_9 + \Pi_7^{1T} \bar{Y}_1 \Pi_{13} + \Pi_{15}^{1T} \bar{Z} \Pi_{11} \right\} \\ & \quad + \Pi_{11}^T \bar{Z} \Pi_{11} + e_6^T \bar{Z}_1 e_6, \\ \bar{\Xi}_{ij}^2 &= \text{sym} \left\{ \Pi_{12}^{2T} \bar{Y}_1 \Pi_8 + \Pi_{12}^{2T} \bar{Y}_2 \Pi_9 + \Pi_7^{2T} \bar{Y}_1 \Pi_{13} + \Pi_{15}^{2T} \bar{Z} \Pi_{11} \right\} \\ & \quad - \Pi_{11}^T \bar{Z} \Pi_{11} + e_6^T \bar{R}_2 e_6, \\ \bar{F}_{ij} &= \text{sym} \left\{ (e_1^T + \lambda_1 e_2^T + \lambda_2 e_3^T + \lambda_3 e_6^T) (-G^T e_6 + A_i G^T e_1 \right. \\ & \quad \left. + A_{\tau_i} G^T e_2 + B_i \bar{K}_j e_3 + B_i \bar{K}_{\tau_j} e_4) \right\}. \end{aligned}$$

则存在状态反馈控制器如式(7-6), 控制器增益 $K_j = \bar{K}_j G^{-1}$ 和 $K_{\tau_j} = \bar{K}_{\tau_j} G^{-1}$ 使得系统(7-2)镇定, 即闭环系统(7-7)满足渐近稳定。

证明 构建 L-K 泛函如式(7-12)所示。首先沿系统(7-7)进行求导得, 若式(7-11)成立, 则有 $\dot{W} \leq 0$ 。将式(7-11)左乘 $\text{diag}\{G, G, G\}$, 右乘 $\text{diag}\{G, G, G\}^T$ 。进而得

$$\begin{aligned} G_1 &= G^{-1}, \quad G_2 = \lambda_1 G^{-1}, \\ G_3 &= \lambda_2 G^{-1}, \quad G_4 = \lambda_3 G^{-1}, \\ \bar{K}_j &= K_j G^T, \quad \bar{K}_{\tau_j} = K_{\tau_j} G^T, \\ \bar{P} &= \text{diag}\{G, G, G, G\} P \text{diag}\{G, G, G, G\}^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Q} &= \text{diag}\{G, G\}Q \text{diag}\{G, G\}^T, \\
 \bar{T} &= GTG^T, \quad \bar{S} = GSG^T, \\
 \bar{R}_1 &= GR_1G^T, \quad \bar{R}_2 = GR_2G^T, \\
 \bar{X} &= \text{diag}\{G, G\}XG^T, \\
 \bar{Y}_k &= \text{diag}\{G, G, G\}Y_k \text{diag}\{G, G, G\}^T, \quad k=1, 2, \\
 \bar{Z} &= \text{diag}\{G, G, G, G, G\}Z \text{diag}\{G, G, G, G, G\}^T, \\
 \bar{N}_{ij}^l &= \text{diag}\{G, G, G, G, G, G, G, G, G, G, G\}N_{ij}^lG^T.
 \end{aligned}$$

证毕。

当时滞为 0 时，令 $K_{\tau_j} = 0$ ，得闭环模糊系统如下，

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\theta(t)) \lambda_j(\theta(t_k)) (A_i x(t) + B_i K_j x(t_k)), \quad t \in \Omega^k, \quad (7-23)$$

于是，有如下定理，

定理 7-3 给定闭环模糊系统(7-23)，若存在正常值 h ， λ_k ， $k=1, 2, 3$ ，正定对称矩阵 $\hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\hat{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\hat{R}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，任意对称矩阵 $\hat{Z} \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ ，任意矩阵 $\hat{Y}_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ， $\hat{Y}_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ， $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\hat{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\hat{K}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，和 $\hat{N}^l \in \mathbb{R}^{6n \times n}$ ， $i, j=1, 2, \dots, r$ ， $l=1, 2, 3, 4$ ，满足下式

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{ij}^0 + h\hat{\Xi}_{ij}^1 & h\hat{N}^1 & h\hat{N}^2 \\ * & -h\hat{R}_2 & 0 \\ * & * & -3h\hat{R}_2 \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{ij}^0 + h\hat{\Xi}_{ij}^2 & h\hat{N}^3 & h\hat{N}^4 \\ * & -h\hat{R}_1 & 0 \\ * & * & -3h\hat{R}_1 \end{bmatrix} < 0 \\
 & \hat{\Xi}_{ij}^0 < 0
 \end{aligned} \quad (7-24)$$

其中，

$$\begin{aligned}
 \hat{\Xi}_{ij}^0 &= \text{sym} \left\{ e_1^T \hat{P} e_4 + \Pi_5^{0T} \hat{Y}_1 \hat{\Pi}_2 + \hat{\Pi}_5^{0T} \hat{Y}_2 \hat{\Pi}_3 + e_4^T \hat{X} \hat{\Pi}_{10} - \hat{\Pi}_8 \hat{X} e_4 + \hat{\Pi}_5^{0T} \hat{Y}_1 \hat{\Pi}_2 \right. \\
 & \quad \left. + \hat{\Pi}_5^{0T} \hat{Y}_2 \hat{\Pi}_3 + \hat{N}^1 \hat{\Pi}_8 + \hat{N}^2 \hat{\Pi}_9 + \hat{N}^3 \hat{\Pi}_{10} + \hat{N}^4 \hat{\Pi}_{11} \right\} + \hat{F}_{ij}, \\
 \hat{\Xi}_{ij}^1 &= \text{sym} \left\{ \hat{\Pi}_5^{1T} \hat{Y}_1 \hat{\Pi}_2 + \Pi_5^{1T} \hat{Y}_2 \hat{\Pi}_3 + \hat{\Pi}_1^{1T} \hat{Y}_1 \hat{\Pi}_6 + \hat{\Pi}_7^{1T} \hat{Z} \hat{\Pi}_4 \right\} + \hat{\Pi}_4^T \hat{Z} \hat{\Pi}_4 + e_4^T \hat{R}_1 e_4, \\
 \hat{\Xi}_{ij}^2 &= \text{sym} \left\{ \hat{\Pi}_5^{2T} \hat{Y}_1 \hat{\Pi}_2 + \Pi_5^{2T} \hat{Y}_2 \hat{\Pi}_3 + \hat{\Pi}_1^{2T} \hat{Y}_1 \hat{\Pi}_6 + \hat{\Pi}_7^{2T} \hat{Z} \hat{\Pi}_4 \right\} - \hat{\Pi}_4^T \hat{Z} \hat{\Pi}_4 + e_4^T \hat{R}_2 e_4, \\
 \hat{F}_{ij} &= \text{sym} \left\{ (e_1^T + \lambda_1 e_2^T + \lambda_2 e_4^T) (-\hat{G}^T e_4 + A_i \hat{G}^T e_1 + B_i \hat{K}_j e_2) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Pi}_1^1 &= \text{col}\{e_1 - e_2, 0\}, \quad \hat{\Pi}_1^2 = \text{col}\{0, e_3 - e_1\}, \\
 \hat{\Pi}_2 &= \hat{\Pi}_1^1 + \hat{\Pi}_1^2, \quad \hat{\Pi}_3 = \text{col}\{e_2, e_3\}, \\
 \hat{\Pi}_4 &= \text{col}\{e_2, e_3, e_5, e_6\}, \quad \hat{\Pi}_5^0 = -\hat{\Pi}_1^1 + \hat{\Pi}_1^2, \\
 \hat{\Pi}_5^1 &= \text{col}\{e_4, 0\}, \quad \hat{\Pi}_5^2 = \text{col}\{0, -e_4\}, \\
 \hat{\Pi}_6 &= \hat{\Pi}_5^1 + \hat{\Pi}_5^2, \quad \hat{\Pi}_7^1 = \text{col}\{0, 0, e_1 - e_5, 0\}, \\
 \hat{\Pi}_7^2 &= \text{col}\{0, 0, 0, e_6 - e_1\}, \quad \hat{\Pi}_8 = e_3 - e_1, \\
 \hat{\Pi}_9 &= e_3 + e_1 - 2e_6, \quad \hat{\Pi}_{10} = e_1 - e_2, \\
 \hat{\Pi}_{11} &= e_1 + e_2 - 2e_5,
 \end{aligned} \tag{7-25}$$

则存在状态反馈控制器，控制器增益 $K_j = \hat{K}_j \hat{G}^{-1}$ ，使得闭环系统(7-23)满足渐近稳定。

证明 将定理 7-2 中的 Q ， T ， S 置为 0，令 $N_{ij}^l = N^l$ ， $\xi(t) = \text{col}\{x(t), x(t_k), x(t_{k+1}), \dot{x}(t), v_1(t), v_2(t)\}$ 。其余参数不变。证明过程与定理 7-2 类似，不再赘述。

7.4 数值仿真

本小节给出两个仿真案例验证了本文所提的方法的有效性。

例 7-1 考虑下述搅拌反应釜(Stirred Tank Reactor)系统，

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{\lambda} x_1(t) + D_a (1 - x_1(t)) \exp\left(\frac{x_2(t)}{1 + x_2(t)/\gamma_0}\right) + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) x_1(t - \tau) \\
 \dot{x}_2(t) = -\left(\frac{1}{\lambda} + \beta\right) x_2(t) + H D_a (1 - x_1(t)) \exp\left(\frac{x_2(t)}{1 + x_2(t)/\gamma_0}\right) \\
 \quad + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) x_2(t - \tau) + \beta u \\
 x_i(t) = \theta_i(t) \quad t \in [-\tau, 0] \quad i = 1, 2
 \end{cases} \tag{7-26}$$

其中， $x_1(t)$ 表示反应转化率，满足 $0 \leq x_1(t) \leq 1$ ， $x_2(t)$ 表示反应转化率无量纲温度， u 为控制输入。给定参数为 $\lambda = 0.8$ ， $D_a = 0.072$ ， $\gamma_0 = 20$ ， $H = 8$ ， $\beta = 0.3$ ， $\tau = 1$ 。

当 $u = 0$ 时，系统(7-26)有三个平衡点，分别为 $x^1(t) = [0.1440, 0.8862]^T$ ， $x^2(t) = [0.4472, 2.7520]^T$ 和 $x^3(t) = [0.7646, 4.7052]^T$ 。其中， $x^1(t)$ 和 $x^3(t)$ 是局部稳定点， $x^2(t)$ 是不稳定点^[144]。目标是设计采样控制器实现系统的全局稳定性，所期望的全局稳定点为 $x_d = (0.1440, 0.8662)$ ， $u_d = 0$ 。令 $y(t) \triangleq x(t) - x_d$ ， $r(t) \triangleq u(t) - u_d$ 。

为减少设计复杂性，系统(7-26)可以用下面的 T-S 模糊系统模型来近似，

模糊规则 1: 若 $x_2(t)$ is about 0.8862, 则

$$\dot{y}(t) = A_1 y(t) + A_{d1} y(t - \tau) + B_1 r(t)$$

模糊规则 2: 若 $x_2(t)$ is about 2.7520, 则

$$\dot{y}(t) = A_2 y(t) + A_{d2} y(t - \tau) + B_2 r(t)$$

模糊规则 3: 若 $x_2(t)$ is about 4.7052, 则

$$\dot{y}(t) = A_3 y(t) + A_{d3} y(t - \tau) + B_3 r(t)$$

其中,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.4274 & 0.0757 \\ -1.4189 & -0.9442 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.0508 & 0.3958 \\ -6.4066 & 1.6268 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -4.5279 & 0.3167 \\ -26.2228 & 0.9387 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$A_{d2} = A_{d1}, \quad A_{d3} = A_{d1}, \quad B_1 = B_2 = B_3 = [0, 0.3]^T.$$

相应的隶属度函数如下,

$$\lambda_1(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 \leq 0.8862 \\ 1 - \frac{x_2 - 0.882}{2.7520 - 0.8862}, & 0.8862 < x_2 < 2.7520 \\ 0, & x_2 \geq 2.7520 \end{cases}$$

$$\lambda_2(x_2) = \begin{cases} 1 - \lambda_1(x_2), & x_2 \leq 2.7520 \\ 1 - \lambda_3(x_2), & x_2 > 2.7520 \end{cases}$$

$$\lambda_3(x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 \leq 2.7520 \\ \frac{x_2 - 2.7520}{4.7052 - 2.7520}, & 2.7520 < x_2 < 4.7052 \\ 1, & x_2 \geq 4.7052 \end{cases}$$

设计模糊采样控制器 $r(t) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x_2(t_k))(K_j x(t_k) + K_{\tau j} x(t_k - \tau))$, 得

$$u(t) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x_2(t_k))(K_j x(t_k) + K_{\tau j} x(t_k - \tau)) \quad (7-27)$$

应用定理 7-2, 通过 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解出系统(7-2)的全局镇定条件。所得的最大允许采样周期和其他文献的结果都由表 7-1 给出。

表 7-1 所得的最大允许采样上界 h_{\max}

Table 7-1 The maximum admissible sampling bound h_{\max}

方法	文献[144]	文献[144]	文献[144]	定理 7-1
h_{\max}	0.3410	0.6953	0.8338	0.9046

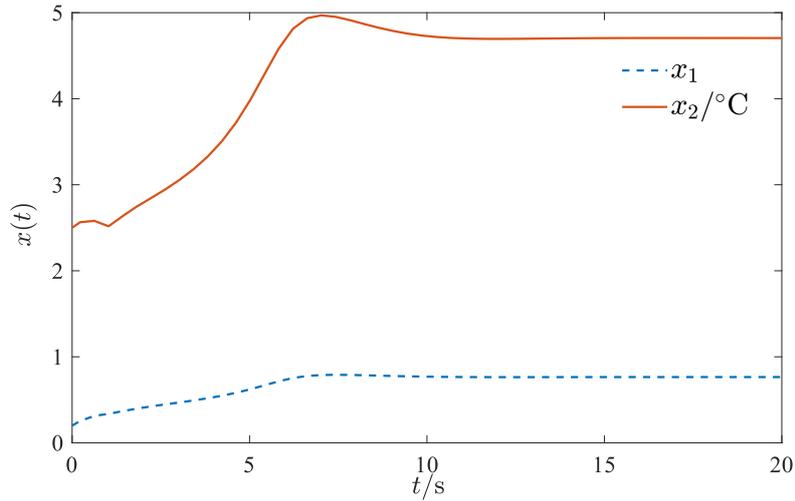


图 7-1 开环状态下系统的状态轨迹

Fig. 7-1 The response of the state variables of open-loop system

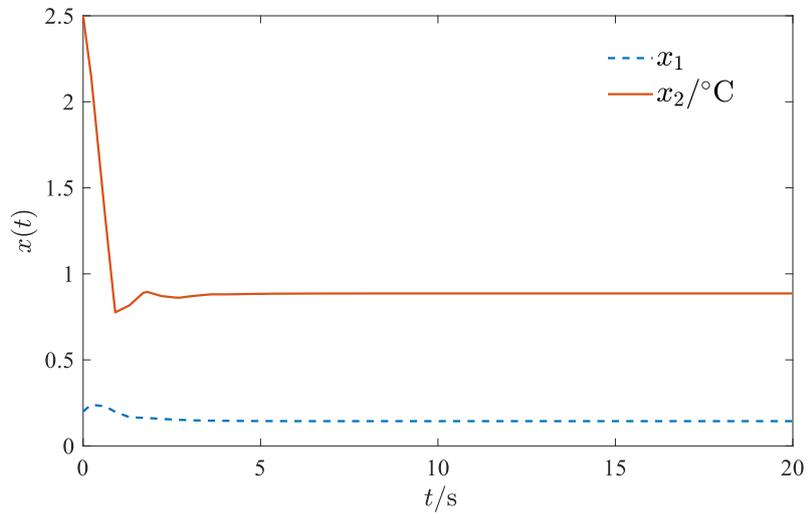


图 7-2 闭环状态下系统的状态轨迹

Fig. 7-2 The response of the state variables of close-loop system

当 $\lambda_1=0.01$, $\lambda_2=0.22$ 和 $\lambda_3=0.49$, 由定理 7-2 得出最大允许采样周期 $h_{\max}=0.9046$, 相应的控制增益矩阵为

$$\begin{aligned} K_1 &= [-0.4580 - 3.3208], K_{\tau_1} = [-0.0017 - 0.1562] \\ K_2 &= [-0.4580 - 3.3208], K_{\tau_2} = [-0.0017 - 0.1562]. \end{aligned} \quad (7-28)$$

当 $K_{\tau_i} = 0 (i=1,2)$ 时, 得 $h_{\max} = 0.8865$, 说明 K_{τ_i} 的引入可以改善所得的结果。

当系统初值取 $x(0) = [0.2; 2.5]$ 时, 给出了开环状态下的系统状态轨迹, 如图 7-1 所示, 可以看到系统将会稳定在某个局部平衡点处。当控制增益矩阵如式(7-28)所示, 给出了系统的状态响应曲线如图 7-2 所示, 可以看到系统状态最终趋近于所设计的平衡点处。

例 7-2 考虑一类 Lorenz 系统如下,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = bx_1(t) - (c - x_1(t))x_3(t) + u(t) \end{cases} \quad (7-29)$$

其中, $x_1(t) \in [-d, d]$ 。此 Lorenz 系统可以表示系统(7-2)的形式, 其具体参数如下,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -d \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & d \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T,$$

相应的隶属度函数为 $\lambda_1(x_1) = \frac{c+d-x_1(t)}{2d}$, $\lambda_2(x_1) = 1 - \lambda_1(x_1)$ 。令 $a = 0.3$, $b = 0.5$,

$c = 5$, $d = 5$ 。

表 7-2 所得的最大允许采样上界 h_{\max}

Table 7-2 The maximum admissible sampling bound h_{\max}

方法	h_{\max}	NDVs
文献[139]	0.0534	$18.5n^2 + 2.5n + 2mn$
文献[138]	0.0692	$24n^2 + 3n + 2mn$
文献[145]	0.0736	$513.5 + 111.5n + 2mn$
文献[142]	0.0959	$58n^2 + 6n + 2mn$
文献[143]	0.1147	$55n^2 + 4n + 2mn$
定理 7-3	0.1165	$43.5n^2 + 3.5n + 2mn$

应用定理 7-3, 通过 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解出系统(7-7)稳定所允许的最大采样周期和其他文献的结果都由表 7-2 给出。从中可以看出本章所提的方法与

其它结果相比，得到了更大的采样周期间隔，具有更小的保守性。

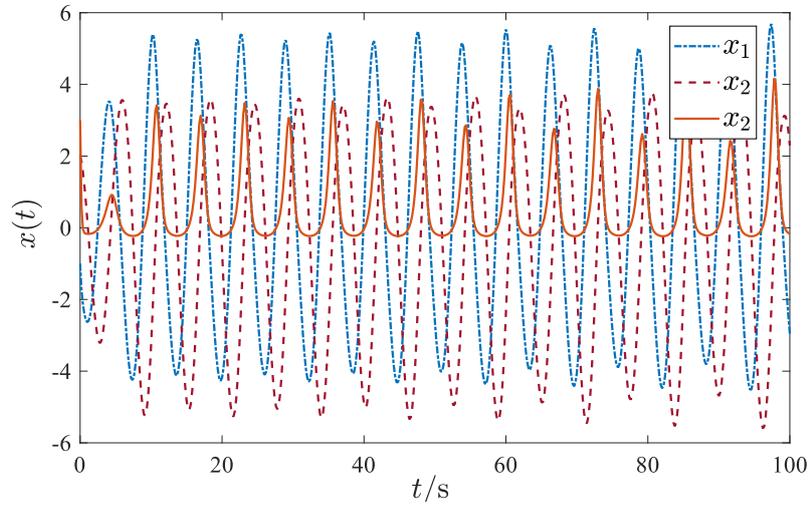


图 7-3 开环状态下系统的状态轨迹

Fig. 7-3 The response of the state variables of open-loop system

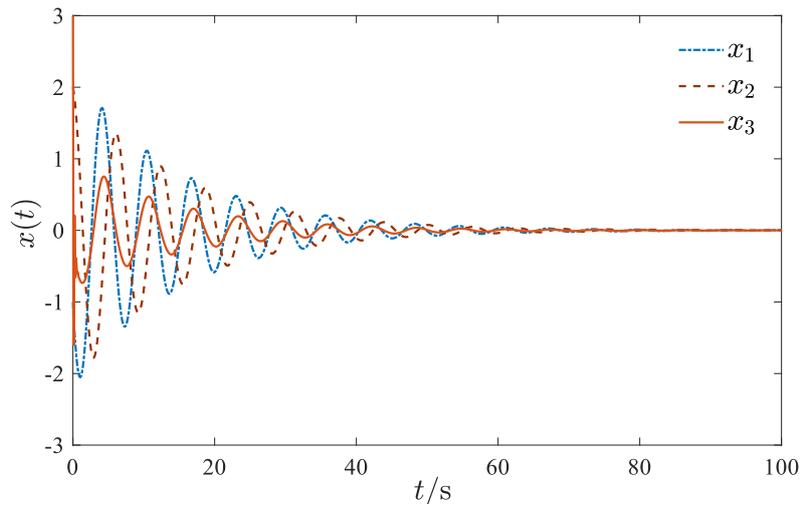


图 7-4 闭环状态下系统的状态轨迹

Fig. 7-4 The response of the state variables of close-loop system

当系统初值取 $x(0) = [-1; 2; 3]$ 时，给出了系统在开环、闭环状态下的状态响应曲线，分别如图 7-3 和图 7-4 所示。可知，系统在开环状态下是发散的，在设计的控制器作用下，闭环系统在平衡点处是渐近稳定的。控制输入曲线如图 7-5 所示。

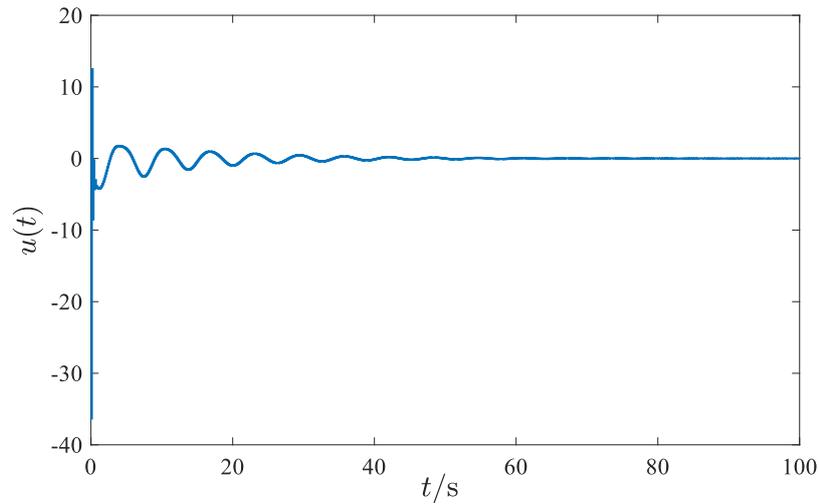


图 7-5 闭环状态下系统的控制输入曲线

Fig. 7-5 The response of the control input variables of closed-loop system

7.5 本章小结

本章讨论了 T-S 模糊时滞系统的稳定性以及采样控制器设计问题。考虑环函数的概念，通过构建新的泛函形式来判断系统的稳定性问题，使得所构建的 L-K 泛函不需要满足在整个时间运行域上单调递减的条件。所设计的采样控制器不仅利用系统当前的状态，而且考虑到了系统滞后的状态信息。最后结合新的泛函形式和改进的积分不等式技术给出了 LMI 形式的系统稳、镇定条件。数值仿真验证了所设计控制器的有效性和优越性。

结 论

随着经济、社会的发展，人们对生产的要求不断提高，时滞现象带来的影响不可忽视。本文针对线性和非线性时滞系统的稳定性问题，采用 Lyapunov-Krasovskii 泛函的方法，并以线性矩阵不等式和线性算子不等式方法为工具，得到了相应的稳定性判据，丰富和改进了现有的研究成果。本文的创新点及结论可概括为：

(1) 针对连续线性时滞系统，由于其时滞常微分方程不能直接、全面地表达出时滞系统的无穷维的特性，给出了其常微分-偏微分表达式，将其写成基于 PI 算子和基础状态的 DPS 形式。然后针对 DPS 形式的线性时滞系统，构造基于 PI 算子的完全型 L-K 泛函，得到了基于 LOI 的连续线性时滞系统的时滞相关稳定性判据以及优化观测器设计判据。所得判据放松了现有相关文献所得时滞相关稳定性和优化观测器设计约束条件，保守性较小。

(2) 针对离散线性时滞系统和离散递归神经网络时滞系统，由于现有文献常常使用 Wirtinger 不等式放缩方法处理 L-K 泛函导数，导致结果保守性较大的问题，提出了新型求和不等式放缩方法，通过构造增广型 L-K 泛函，得到了基于 LMI 的稳定性判据。所得判据放松了现有相关文献所得时滞相关稳定性约束条件，保守性较小。

(3) 针对 T-S 模糊时滞系统的稳定性和采样控制问题，考虑其采样控制结构，构造双边环函数，将该双边环函数与 L-K 泛函的和作为新的判别泛函形式，以其导数情况来判断系统的稳定性问题，其中 L-K 泛函不需要满足在整个时间域上单调递减，结合保守性较小的不等式放缩技术，得到了基于 LMI 的保守性较小的控制器设计方法及稳定性判据。

虽然本文给出了关于时滞系统稳定性研究的一些结果，但仍有许多问题需要在未来的研究工作中进一步探索与完善，主要有：

(1) 本文所使用的 LOI 研究框架时最近提出的，虽然有望建立保守性极小的甚至充分必要条件，但还不构成成熟，仍然在完善过程中。目前只是应用在了连续线性时滞系统的研究中，得到了较好的研究结果，但对于离散时滞和时变时滞系统，仍然会存在一些问题，PI 算子形式需要相应的改变和适应，新提出的 PIE 工具箱也存

在着适应性问题等等，有待进一步研究和改进。

(2) 输入时滞一直是时滞系统研究中的一大难题。当实际工程系统中控制器与执行器间的传输时滞不可忽视时，控制信号不能及时到达执行器，被控对象不能及时被控，控制品质变差，甚至影响系统的稳定性。目前还没有基于完全型 L-K 泛函方法针对输入时滞系统的研究，需要进一步的研究和验证。

(3) 针对非线性时滞系统的研究是从线性时滞系统的角度出发进行的，并没有充分考虑非线性本身的性质，研究结果仍然存在一定的保守性。针对 T-S 模糊时滞系统，对于模糊系统的模糊信息利用不够充分。另外，对非线性时滞系统，LOI 方法及其研究框架同样也处于尝试阶段，有待深入研究。

参考文献

- [1] Chiasson J, Loiseau J J. Applications of time delay systems[M]. Springer, 2007.
- [2] Trinh H. New finite-sum inequalities with applications to stability of discrete time-delay systems[J]. Automatica, 2016, 71: 197-201.
- [3] Gu K, Chen J, Kharitonov V L. Stability of time-delay systems[M]. Springer, 2003.
- [4] Fridman E. Introduction to time-delay systems: Analysis and control[M]. Springer, 2014.
- [5] Sun J, Chen J. A survey on Lyapunov-based methods for stability of linear time-delay systems[J]. Frontiers of Computer Science, 2017, 11(4): 555-567.
- [6] 吴敏, 何勇. 时滞系统鲁棒控制: 自由权矩阵方法[M]. 2008.
- [7] Dugard L, Verriest E I. Stability and control of time-delay systems[M]. 228. Springer, 1998.
- [8] 葛超. 基于改进型 Lyapunov 泛函的时滞系统稳定性新判据研究及应用[D]. 燕山大学博士学位论文, 2014.
- [9] Birs I, Muresan C, Nascu I, et al. A survey of recent advances in fractional order control for time delay systems[J]. IEEE Access, 2019, 7: 30951-30965.
- [10] Wang Z, Liu P, Ding S, et al. A brief review on stability analysis of time delay systems based on LKF[C]. The World Congress on Intelligent Control and Automation, 2018, 596-601.
- [11] Norkin S B. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments[M]. Academic Press, 1973.
- [12] Gouaisbaut F, Peaucelle D. Delay-dependent stability analysis of linear time delay systems[J]. Proceedings of IFAC, 2006, 39(10): 54-59.
- [13] Delice I I, Sipahi R. Delay-independent stability test for systems with multiple time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 57(4): 963-972.
- [14] Mori T, Fukuma N, Kuwahara M. Delay-independent stability criteria for discrete-delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27(4): 964-966.
- [15] Niculescu S I. Delay effects on stability: a robust control approach[M]. Springer, 2001.
- [16] Qian W, Liu J, Fei S. New augmented Lyapunov functional method for stability of uncertain neutral systems with equivalent delays[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2012, 84:

42-50.

- [17] Park P, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 235-238.
- [18] Park M, Kwon O, Park J H, et al. Stability of time-delay systems via Wirtinger-based double integral inequality[J]. *Automatica*, 2015, 55: 204-208.
- [19] Seuret A, Gouaisbaut F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2860-2866.
- [20] Kim J-H. Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems[J]. *Automatica*, 2016, 64: 121-125.
- [21] He Y, Wang Q, Xie L, et al. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic control*, 2007, 52(2): 293-299.
- [22] 俞立. 鲁棒控制：线性矩阵不等式处理方法[M]. 清华大学出版社, 2002.
- [23] Siala F, Gassara H, Chaabane M, et al. Stability analysis of polynomial fuzzy systems with time-delay via sum of squares (SOS) approach. *International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering, IEEE*, 2004.
- [24] He Y, Wang Q, Lin C, et al. Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2005, 15(18): 923-933.
- [25] Ji X, Su H. A note on equivalence between two integral inequalities for time-delay systems[J]. *Automatica*, 2015, 53: 244-246.
- [26] Gyurkovics A note on Wirtinger-type integral inequalities for time-delay systems[J]. *Automatica*, 2015, 61: 44-46.
- [27] Sipahi R, Vyhlídal T, Niculescu S I, et al. *Time delay systems: Methods, applications and new trends*[M]. Springer, 2012.
- [28] Sachin Shivakumar A D, Matthew M. Peet. PIETOOLS: A MATLAB toolbox for solving programs involving PI operators[C]. *Proceedings of the American Control Conference*, 2019, submitted.
- [29] Peet M M. A dual to Lyapunov's second method for linear systems with multiple delays and implementation using SOS[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64(3): 944-959.

- [30] Peet M M, Gu K. SOS for systems with multiple delays: Part 2. H_∞ optimal estimation[C]. Proceedings of the American Control Conference, 2019.
- [31] Peet M M. Stability and Control of Functional Differential Equations[J]. Mathematics, 2006.
- [32] Seuret A, Peet M M. Stability analysis of sampled-data systems using sum of squares[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 58(6): 1620-1625.
- [33] Liu K, Fridman E. Wirtinger's inequality and Lyapunov-based sampled-data stabilization[J]. Automatica, 2012, 48(1): 102-108.
- [34] Seuret A, Gouaisbaut F. Complete quadratic Lyapunov functionals using Bessel-Legendre inequality[C]. Proceedings of European Control Conference, 2014: 448-453.
- [35] Chen J. On computing the maximal delay intervals for stability of linear delay systems[C]. Proceedings of the American Control Conference, 1994: 1934-1938.
- [36] Olgac N, Sipahi R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(5): 793-797.
- [37] 李旭光. 时滞系统稳定性的若干研究[D]. 上海交通大学博士学位论文, 2007.
- [38] Hale J K, Lunel S M V. Introduction to functional differential equations[M]. Springer, 2013.
- [39] Liu X, Zhong S, Ding X. Robust exponential stability of impulsive switched systems with switching delays: a Razumikhin approach[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(4): 1805-1812.
- [40] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 1048-1060.
- [41] Hahn W. Stability of motion[M]. Springer, 1967.
- [42] Gu K, Niculescu S I. Stability Analysis of Time-delay Systems: A Lyapunov Approach. Advanced Topics in Control Systems Theory[M]. Springer, 2006, 139-170.
- [43] Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control: constant and time-varying delays[J]. International Journal of Control, 2003, 76(1): 48-60.
- [44] Suplin V, Fridman E, Shaked U. H_∞ control of linear uncertain time-delay systems-a projection approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(4): 680-685.
- [45] Kharitonov V L, Niculescu S I. On the stability of linear systems with uncertain delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(1): 127-132.
- [46] Shao H. Delay-dependent stability for recurrent neural networks with time-varying delays[J].

- IEEE Transactions on Neural networks, 2008, 19(9): 1647-1651.
- [47] Fridman E, Shaked U. Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems[J]. International Journal of Control, 2005, 78(4): 235-246.
- [48] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435-1439.
- [49] Parlakci M A. Extensively augmented Lyapunov functional approach for the stability of neutral time-delay systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2008, 2(5): 431-436.
- [50] Zhang H, Gong D, Chen B, et al. Synchronization for coupled neural networks with interval delay: A novel augmented Lyapunov–Krasovskii functional method[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 24(1): 58-70.
- [51] Kwon O M, Park M J, Park J H, et al. Analysis on robust H_∞ performance and stability for linear systems with interval time-varying state delays via some new augmented Lyapunov–Krasovskii functional[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 224: 108-122.
- [52] Shao H. New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay[J]. Automatica, 2009, 45(3): 744-749.
- [53] Sun J, Liu G, Chen J, et al. Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2010, 46(2): 466-470.
- [54] Sun J, Liu G, Chen J. Delay-dependent stability and stabilization of neutral time - delay systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(12): 1364-1375.
- [55] Sun J, Liu G P. On improved delay-dependent stability criteria for neutral time-delay systems[J]. European Journal of Control, 2009, 15(6): 613-623.
- [56] Sun J, Chen J, Liu G P, et al. Delay-dependent robust H_∞ filter design for uncertain linear systems with time-varying delay[J]. Circuits, Systems and Signal Processing, 2009, 28(5): 763-779.
- [57] Chen J, Sun J, Liu G, et al. New delay-dependent stability criteria for neural networks with time-varying interval delay[J]. Physics Letters A, 2010, 374(43): 4397-4405.
- [58] Shi K, Zhu H, Zhong S, et al. Stability analysis of neutral type neural networks with mixed time-varying delays using triple-integral and delay-partitioning methods[J]. ISA Transactions, 2015, 58: 85-95.
- [59] Liu J, Hou Z. New stability analysis for systems with interval time-varying delay based on

- Lyapunov functional method[J]. *Journal of Information and Computation Science*, 2014, 11(6): 1843-1851.
- [60] Qian W, Cong S, Li T, et al. Improved stability conditions for systems with interval time-varying delay[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2012, 10(6): 1146-1152.
- [61] Xu S, Lam J, Zhang B, et al. New insight into delay-dependent stability of time-delay systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(7): 961-970.
- [62] Lee T H, Park J H, Xu S. Relaxed conditions for stability of time-varying delay systems[J]. *Automatica*, 2017, 75: 11-15.
- [63] Lee T H, Park J H. A novel Lyapunov functional for stability of time-varying delay systems via matrix-refined-function[J]. *Automatica*, 2017, 80: 239-242.
- [64] Zhang B, Lam J, Xu S. Stability analysis of distributed delay neural networks based on relaxed Lyapunov-Krasovskii functionals[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 26(7): 1480-1492.
- [65] Huang H, Feng G. State estimation of recurrent neural networks with time-varying delay: a novel delay partition approach[J]. *Neurocomputing*, 2011, 74(5): 792-796.
- [66] Zhu S, Li Z, Zhang C. Delay decomposition approach to delay-dependent stability for singular time-delay systems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(11): 2613-2620.
- [67] Liu P L. A delay decomposition approach to robust stability analysis of uncertain systems with time-varying delay[J]. *ISA Transactions*, 2012, 51(6): 694-701.
- [68] Repin I M. Quadratic Liapunov functionals for systems with delay[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, 29(3): 669-672.
- [69] Gu K. Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems[J]. *International Journal of Control*, 1997, 68(4): 923-934.
- [70] Peet M M. LMI parametrization of Lyapunov functions for infinite-dimensional systems: A framework[C]. *Proceedings of the American Control Conference*, 2014, 359-366.
- [71] Miao G, Peet M M, Gu K. Inversion of separable kernel operators in coupled differential-functional equations and application to controller synthesis[J]. *Proceedings of IFAC*, 2017, 50(1): 6513-6518.
- [72] Park P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic control*, 1999, 44(4): 876-877.

- [73] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(14): 1447-1455.
- [74] Fridman E. New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 43(4): 309-319.
- [75] He Y, Wu M, She J H, et al. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Automatic control*, 2004, 49(5): 828-832.
- [76] Zhang C K, He Y, Jiang L, et al. An extended reciprocally convex matrix inequality for stability analysis of systems with time-varying delay[J]. *Automatica*, 2017, 85: 481-485.
- [77] Shivakumar S, Das A, Weiland S, et al. A Generalized LMI Formulation for Input-Output Analysis of Linear Systems of ODEs Coupled with PDEs[J]. *arXiv preprint arXiv:1904.10091*, 2019.
- [78] Seuret A, Gouaisbaut F. Hierarchy of LMI conditions for the stability analysis of time-delay systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2015, 81: 1-7.
- [79] Park P G , Lee W I , Lee S Y . Auxiliary Function-based Integral Inequalities for Quadratic Functions and their Applications to Time-delay Systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(4):1378-1396.
- [80] Zhao Y, Gao H, Lam J, et al. Stability and stabilization of delayed T--S fuzzy systems: a delay partitioning approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 17(4): 750-762.
- [81] Kwon O, Park M J, Park J H, et al. Stability and stabilization of TS fuzzy systems with time-varying delays via augmented Lyapunov-Krasovskii functionals[J]. *Information Sciences*, 2016, 372: 1-15.
- [82] Kwon O, Park M J, Park J H, et al. Stability and stabilization for discrete-time systems with time-varying delays via augmented Lyapunov–Krasovskii functional[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, 350(3): 521-540.
- [83] Zeng H B, He Y, Wu M, et al. New results on stability analysis for systems with discrete distributed delay[J]. *Automatica*, 2015, 60: 189-192.
- [84] Peet M M, Papachristodoulou A, Lall S. Positive forms and stability of linear time-delay systems[C]. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, 187-193.
- [85] Peet M M. A convex reformulation of the controller synthesis problem for infinite-dimensional systems using Linear Operator Inequalities (LOIs) with application to MIMO multi-delay

- systems[C]. Proceedings of the American Control Conference, 2018, 3322-3329.
- [86] Peet M M, Papachristodoulou A. Inverses of positive linear operators and state feedback design for time-delay systems[J]. Proceedings of IFAC, 2009, 42(14): 278-283.
- [87] Peet M M, Papachristodoulou A, Lall S. Positive forms and stability of linear time-delay systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2009, 47(6): 3237-3258.
- [88] Peet M M. A new mathematical framework for representation and analysis of coupled PDEs[J]. arXiv preprint, 2019.
- [89] Chen J, Xu S, Zhang B. Single/multiple integral inequalities with applications to stability analysis of time-delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(7): 3488-3493.
- [90] Zhao N, Lin C, Chen B, et al. A new double integral inequality and application to stability test for time-delay systems[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 65: 26-31.
- [91] Kamen E. Linear systems with commensurate time delays: Stability and stabilization independent of delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27(2): 367-375.
- [92] Fattouh A, Sename O, Dion J M. H_∞ observer design for time-delay systems[C]. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 1998, 4545-4546.
- [93] Boutayeb M. Observers design for linear time-delay systems[J]. Systems and Control Letters, 2001, 44(2): 103-109.
- [94] Efimov D, Fridman E, Polyakov A, et al. Linear interval observers under delayed measurements and delay-dependent positivity[J]. Automatica, 2016, 72: 123-130.
- [95] Wang Z, Huang B, Unbehauen H. Robust H_∞ observer design of linear state delayed systems with parametric uncertainty: the discrete-time case[J]. Automatica, 1999, 35(6): 1161-1167.
- [96] Gao N, Darouach M, Voos H, et al. New unified H_∞ dynamic observer design for linear systems with unknown inputs[J]. Automatica, 2016, 65: 43-52.
- [97] Wang Z, Shen Y, Zhang X, et al. Observer design for discrete-time descriptor systems: An LMI approach[J]. Systems and Control Letters, 2012, 61(6): 683-687.
- [98] Wu Z, Su H, Chu J, et al. Improved delay-dependent stability condition of discrete recurrent neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2010, 21(4): 692-697.
- [99] Liu P, Han Q L. Discrete-time analogs for a class of continuous-time recurrent neural networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2007, 18(5): 1343-1355.

- [100] Kwon O, Park M J, Park J H, et al. New criteria on delay-dependent stability for discrete-time neural networks with time-varying delays[J]. *Neurocomputing*, 2013, 121: 185-194.
- [101] Wan X, Wu M, He Y, et al. Stability analysis for discrete time-delay systems based on new finite-sum inequalities[J]. *Information Sciences*, 2016, 369: 119-127.
- [102] Mahmoud M S. Reliable decentralized control of interconnected discrete delay systems[J]. *Automatica*, 2012, 48(5): 986-990.
- [103] Chen J, Lu J, Xu S. Summation inequality and its application to stability analysis for time-delay systems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2016, 10(4): 391-395.
- [104] Zhang B, Xu S, Zou Y. Improved stability criterion and its applications in delayed controller design for discrete-time systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2963-2967.
- [105] Huang H, Feng G. Improved approach to delay-dependent stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(10): 2152-2159.
- [106] Ramakrishnan K, Ray G. Robust stability criteria for a class of uncertain discrete-time systems with time-varying delay[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(3): 1468-1479.
- [107] Kwon O M, Park M J, Park J H, et al. Improved delay-dependent stability criteria for discrete-time systems with time-varying delays[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2013, 32(4): 1949-1962.
- [108] Seow M J, Asari V K. Recurrent neural network as a linear attractor for pattern association[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, 17(1): 246-250.
- [109] Mandic D P, Chambers J. *Recurrent neural networks for prediction: learning algorithms, architectures and stability*[M]. John Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [110] Liu G P. *Nonlinear identification and control: a neural network approach*[M]. Springer, 2012.
- [111] Lee W I, Lee S Y, Park P. Improved stability criteria for recurrent neural networks with interval time-varying delays via new Lyapunov functionals[J]. *Neurocomputing*, 2015, 155: 128-134.
- [112] Zhang C-K, He Y, Jiang L, et al. Delay-dependent stability criteria for generalized neural networks with two delay components[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, 25(7): 1263-1276.
- [113] Hua C, Yang X, Yan J, et al. New stability criteria for neural networks with time-varying delays[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(9): 5035-5042.

-
- [114] Ge C, Hua C, Guan X. New delay-dependent stability criteria for neural networks with time-varying delay using delay-decomposition approach[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, 25(7): 1378-1383.
- [115] Cao J, Wang J. Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2005, 52(2): 417-426.
- [116] Liu P L. Improved delay-dependent robust stability criteria for recurrent neural networks with time-varying delays[J]. *ISA Transactions*, 2013, 52(1): 30-35.
- [117] Li X, Gao H, Yu X. A unified approach to the stability of generalized static neural networks with linear fractional uncertainties and delays[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 2011, 41(5): 1275-1286.
- [118] Wu M, Liu F, Shi P, et al. Improved free-weighting matrix approach for stability analysis of discrete-time recurrent neural networks with time-varying delay[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 2008, 55(7): 690-694.
- [119] Hou L, Zhu H, Zhong S, et al. Less conservative stability criteria for stochastic discrete-time recurrent neural networks with the time-varying delay[J]. *Neurocomputing*, 2013, 115: 72-80.
- [120] Wang T, Zhang C, Fei S, et al. Further stability criteria on discrete-time delayed neural networks with distributed delay[J]. *Neurocomputing*, 2013, 111: 195-203.
- [121] Song C, Gao H, Zheng W X. A new approach to stability analysis of discrete-time recurrent neural networks with time-varying delay[J]. *Neurocomputing*, 2009, 72(10-12): 2563-2568.
- [122] Liu X G, Wang F-X, Shu Y-J. A novel summation inequality for stability analysis of discrete-time neural networks[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016, 304: 160-171.
- [123] Yin L Z. Stability analyses of neural networks with unbounded time-varying delays and nonlinear perturbations[C]. *Applied Mechanics and Materials*, 2013: 1247-1250.
- [124] Cheng J, Zhu H, Zhong S, et al. Novel delay-dependent robust stability criteria for neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(14): 7741-7753.
- [125] Hua C, Liu G, Li L, et al. Adaptive fuzzy prescribed performance control for nonlinear switched time-delay systems with unmodeled dynamics[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2017, 26(4): 1934-1945.

- [126] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1985(1): 116-132.
- [127] Feng G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy systems, 2006, 14(5): 676-697.
- [128] 陈军. T-S 模糊模型的稳定性分析[D]. 南京理工大学博士学位论文, 2017.
- [129] Feng Z, Zheng W X. Improved stability condition for Takagi–Sugeno fuzzy systems with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 47(3): 661-670.
- [130] Lian Z, He Y, Zhang C K, et al. Stability and stabilization of TS fuzzy systems with time-varying delays via delay-product-type functional method[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019.
- [131] Park M J, Kwon O M. Stability and stabilization of discrete-time T-S fuzzy systems with time-varying delay via Cauchy-Schwartz-based summation inequality[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 25(1): 128-140.
- [132] Peng C, Fei M R. An improved result on the stability of uncertain T–S fuzzy systems with interval time-varying delay[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 212: 97-109.
- [133] Ge C, Wang H, Liu Y, et al. Stabilization of chaotic systems under variable sampling and state quantized controller[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 344: 129-144.
- [134] Wang Z P, Wu H-N, Li H X. Sampled-data fuzzy control for nonlinear coupled parabolic PDE-ODE systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(9): 2603-2615.
- [135] Fujioka H. A discrete-time approach to stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices[J]. IEEE Transactions on Automatic control, 2009, 54(10): 2440-2445.
- [136] Hu L S, Lam J, Cao Y Y, et al. A linear matrix inequality (LMI) approach to robust H_∞ sampled-data control for linear uncertain systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, 2003, 33(1): 149-155.
- [137] Fridman E. A refined input delay approach to sampled-data control[J]. Automatica, 2010, 46(2): 421-427.
- [138] Wu Z G, Shi P, Su H, et al. Sampled-data fuzzy control of chaotic systems based on a T-S fuzzy model[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2013, 22(1): 153-163.
- [139] Zhu X L, Chen B, Yue D, et al. An improved input delay approach to stabilization of fuzzy systems under variable sampling[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2011, 20(2): 330-341.
- [140] Seuret A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings[J].

- Automatica, 2012, 48(1): 177-182.
- [141] Zeng H B, Teo K L, He Y. A new looped-functional for stability analysis of sampled-data systems[J]. Automatica, 2017, 82: 328-331.
- [142] Liu Y, Park J H, Guo B Z, et al. Further results on stabilization of chaotic systems based on fuzzy memory sampled-data control[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 26(2): 1040-1045.
- [143] Zhang R, Zeng D, Park J H, et al. A new approach to stabilization of chaotic systems with nonfragile fuzzy proportional retarded sampled-data control[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 49(9): 3218-3229.
- [144] Wang Z P, Wu H. Robust guaranteed cost sampled-data fuzzy control for uncertain nonlinear time-delay systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 49(5): 964-975.
- [145] Wang Z P, Wu H. On fuzzy sampled-data control of chaotic systems via a time-dependent Lyapunov functional approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 45(4): 819-829.

攻读博士学位期间承担的科研任务与主要成果

(一) 科研任务

- [1] 国家建设高水平大学公派研究生项目。中国留学基金委 CSC (编号: 201808130194), 资助期限: 2018.09-2019.09, 项目负责人。
- [2] 两维离散状态时滞系统的稳定性分析及控制。河北省研究生创新资助项目(项目编号: CXZZBS2018054), 资助期限: 2018.04-2019.04, 项目负责人。
- [3] 柔性环境下单主多从遥操作系统的动力学建模与控制, 国家自然科学基金(项目编号: 61603328), 2017.01-2020.12, 项目主要参与人。
- [4] 液压系统运行可靠性的时变耦合非概率建模与融合现场状态信息的实时评估研究, 国家自然科学基金(项目编号: 51675460), 2017.01-2020.12, 项目主要参与人。

(二) 撰写和发表的论文

- [1] Hua C, Wu S, Guan X. Stabilization of T-S fuzzy system with time delay under sampled-data control using a new looped-functional. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, DOI: 10.1109/TFUZZ.2019.2906040, 2019.
- [2] Hua C, Wu S, Yang X, and Guan X. Stability analysis of time-delay systems via free-matrix based double integral inequality. *International Journal of Systems Science*, 2017, 48(2): 257-263.
- [3] Hua C, Wu S, Guan X. New robust stability condition for discrete-time recurrent neural networks with time-varying delays and nonlinear perturbations. *Neurocomputing*, 2016, 219: 203-209.
- [4] Hua C, Wu, S, Bai Z., and Guan X. Improved delay-dependent stability criterion for discrete-time systems with time-varying delays. *Asian Journal of Control*, 2016, 19(2): 708-716.
- [5] Hua C, Wang Y, Wu S. Stability analysis of neural networks with time-varying delay using a new augmented Lyapunov–Krasovskii functional. *Neurocomputing*, 2019, 332: 1-9.
- [6] Li Y, Hua C, Wu S, Guan, X. Output feedback distributed containment control for high-order nonlinear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(8): 2032-2043.
- [7] Hua C, Wang Y, Wu S. Stability analysis of micro-grid frequency control system with two additive time-varying delay. *Journal of the Franklin Institute*, 2019. (已录用)
- [8] Wu S, Peet M M, Hua C. Estimator-based output-feedback stabilization of linear multi-delay

systems using SOS. Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, 2019.(已录用)

- [9] Wu S, Peet M M, Shivakumar S, Hua C. H_∞ optimal estimation in the PIE framework for systems with multiple delays and sensor noise. Proceedings of the American Control Conference, 2019.
(已投)

致 谢

在美丽的燕山大学校园里，我度过了人生中无比珍贵的十载年华。青春一去不返，研究生的学习阶段即将结束。回忆起这一路，有茫然，有坚定，有哭泣，也有快乐。对于现在的自己，我很感恩。因为我很清楚我的每一丝进步，每一点成绩，每一份快乐都离不开父母及周围老师、同学、朋友的包容和支持。

我要感谢我的导师—华长春教授。硕博研究生的时间里，华老师在学习和生活上给予了我们很大的自由，从最初的硕士入学、博士入学到如今博士论文的完成，华老师给予了我一贯的支持和帮助，让我切身领略到华老师的大家风范。华老师的积极、自信、活力、勤奋和自律给我留下了深刻的印象，让我切实感受到越优秀的人，越努力。无论是对待学术研究的态度，还是为人处事的方式，华老师都是我永远学习的榜样。

我要感谢自动化系的各位老师。感谢老师们在研究生阶段专业课上的教导和帮助，我获得了丰富的专业基础知识并顺利完成了课题研究。

我要感谢课题组所有师兄姐妹对我的支持和帮助。感谢师姐杨晔、杨亚娜、张柳柳，李静，师兄李亚峰、黄伟，感谢同届的刘国聘、张宇，师弟王毅博、陈健楠、李志杰，师妹宁静华、王艺潞等对我的帮助。感谢所有课题室同僚，数载同窗，在此一并向他们表示诚挚的谢意。

我要感谢亚利桑那州立大学的 Matthew M. Peet 教授。在这一年里，Peet 老师一直耐心指导、激励着我，在学术道路上为我指引了新的方向。感谢 Sachin 不厌其烦地为我解惑，带我学习新的理论知识。感谢所有 Gold Water Center 531 的同学们。虽短短一载，却受益匪浅。

我要感谢硕博期间的所有室友，有幸相伴，感谢对我的包容和帮助。

我要感谢我的父母。感谢你们含辛茹苦地将我抚养成人，为我的学业承受了沉重的生活压力，一如既往地支持我的想法，鼓励我前行。

感谢伟大的祖国！感谢日渐强大的燕大！

最后的结语送予自己——因为有你爱的和爱你的，所以努力做到更好的自己！